# Příprava na 6. cvičení – determinanty

## Lineární algebra

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

December 2, 2020

1. Opakování ze čtvrtého cvičení
   - Soustavy lineárních rovnic
2. Připomenutí obsahu 7. přednášky
   - Permutace
   - Determinanty
3. Připomenutí obsahu 8. přednášky
   - Rozvoj determinantu
   - Další vlastnosti determinantu
   - Použití determinantu

# Homogenní SLR

Řešte následující soustavy lineárních rovnic:

## Příklad 1

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x - 5y + 4z &= 0 \\ x + 17y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

## Příklad 2

$$\begin{aligned} 4x + y + 2z &= 0 \\ x + y - z &= 0 \\ 6x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

# Nehomogenní SLR

Řešte následující soustavy lineárních rovnic:

## Příklad 3

$$\begin{aligned} x + 3y + z &= 5 \\ 2x + y + z &= 2 \\ x + y + 5z &= -7 \end{aligned}$$

## Příklad 4

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 0 \\ x + 3y + 2z &= 0 \\ 3x - 5y + 4z &= 0 \\ x + 17y + 4z &= 0 \end{aligned}$$

# Nehomogenní SLR

Řešte následující soustavy lineárních rovnic:

## Příklad 5

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & - & u & = & 0 \\ x & + & 5y & + & 5z & - & 4u & = & -4 \\ x & - & y & + & z & + & 2u & = & 4 \\ x & + & 8y & + & 7z & - & 7u & = & 6 \end{array}$$

## Příklad 6

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & - & 4u & = & 4 \\ & & y & - & z & + & u & = & -3 \\ x & + & 3y & & & - & 3u & = & 1 \\ & - & 7y & + & 3z & + & u & = & -3 \end{array}$$

# Permutace

Permutace $\pi$ je vektor $(\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n))$,
kde $\pi(i) \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a pro $i \neq j$ je $\pi(i) \neq \pi(j)$
(tj. každé číslo od 1 do $n$ se vyskytuje právě jednou)

- počet $n$-prvkových permutací je $n! = n \cdot (n-1) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1$
- inverze v permutaci $\pi$: dvojice $i < j$, pro kterou je $\pi(i) > \pi(j)$ ("větší číslo před menším")
- znaménko permutace: $\mathrm{sgn}(\pi) = (-1)^{p(\pi)}$, kde $p(\pi)$ je počet inverzí v permutaci $\pi$
- permutace
  - sudá: $\mathrm{sgn}(\pi) = 1$
  - lichá: $\mathrm{sgn}(\pi) = -1$

# Definice determinantu

Buď $\mathbf{A} = (a_{ij})$ čtvercová matice typu $n \times n$.
Jejím determinantem nazveme reálné číslo

$$\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}| = \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

kde sčítáme přes všechny $n$-prvkové permutace $\pi$.

# Vlastnosti determinantu

- $\det(\mathbf{A}^{\mathbf{T}}) = \det(\mathbf{A})$
- má-li matice $\mathbf{A}$ nulový řádek (sloupec), je $\det(\mathbf{A}) = 0$
- má-li matice $\mathbf{A}$ dva stejné řádky (sloupce), je $\det(\mathbf{A}) = 0$
- zaměníme-li dva řádky (sloupce), změní se znaménko determinantu
- vynásobíme-li jeden řádek (sloupec) $\lambda \in \mathbf{R}$,
  vynásobíme tímto $\lambda$ determinant
- přičteme-li k jednomu řádku (sloupci) násobek jiného řádku (sloupce), determinant se nezmění
- determinant trojúhelníkové matice = součin prvků na diagonále

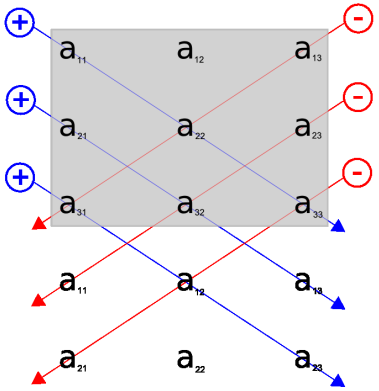
# Základní metody výpočtu

- determinant $2 \times 2$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- determinant $3 \times 3$ – Sarrusovo pravidlo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21} \end{array}$$




- výpočet pomocí řádkových a sloupcových úprav

# Rozvoj determinantu

Algebraický doplněk $A_{ij}$ prvku $a_{ij}$ je $(-1)^{i+j}$ krát determinant matice, která vznikne z $\mathbf{A}$ odstraněním $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce

## Rozvoj determinantu podle $i$-tého řádku

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Poznámky:

- analogicky rozvoj determinantu podle sloupce
- vhodné, pokud vybraný řádek obsahuje hodně nul

# Determinant inverzní matice

- $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ právě když je $\mathbf{A}$ regulární
- determinant součinu matic:

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$$

- důsledek: determinant inverzní matice

$$det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}$$

# Výpočet inverzní matice

- $\mathbf{A} = (a_{ij})$
- algebraický doplněk $A_{ij}$ prvku $a_{ij}$ je $(-1)^{i+j}$ krát determinant matice, která vznikne z $\mathbf{A}$ odstraněním $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce
- matice $\mathbf{A}^{-1}$ má prvky $\alpha_{ij}$, pak

$$\alpha_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \cdot A_{ji}}{\det(\mathbf{A})}$$

neboli

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

# Řešení SLR pomocí determinantu

- mějme soustavu lineárních rovnic $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ se čtvercovou maticí $\mathbf{A}$
- označme $\mathbf{B}_j$ matici, kterou získáme z matice $\mathbf{A}$ nahrazením jejího $j$-tého sloupce sloupcem pravých stran $\vec{b}$

- pokud je matice $\mathbf{A}$ regulární (tj. $\det(\mathbf{A}) \neq 0$), má soustava právě jedno řešení $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro které platí Cramerovo pravidlo:

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{B}_j)}{\det(\mathbf{A})} \qquad \forall j = 1, \ldots, n.$$