Příprava na cvičení - vlastní čísla

Lineární algebra

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

November 30, 2020

1. Komplexní čísla
   - Definice
   - Operace s komplexními čísly
2. Polynomy – opakování ze střední školy
3. Připomínka přednášky o maticích
   - Hodnost matice
   - Singulární matice
4. Přednáška o vlastních číslech
   - Vlastní čísla
   - Vlastní vektory

1 Komplexní čísla
- Definice
- Operace s komplexními čísly

2 Polynomy – opakování ze střední školy

3 Připomínka přednášky o maticích

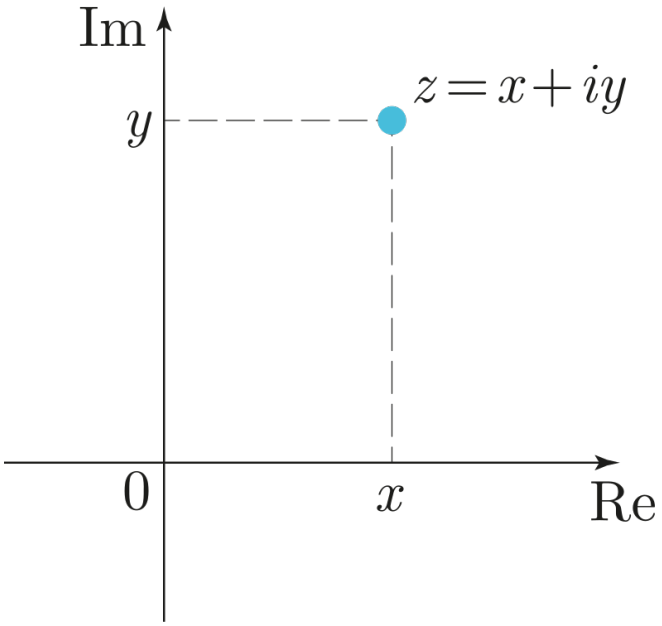
4 Přednáška o vlastních číslech

Zavedení komplexních čísel

Jedna z mnoha definic komplexních čísel

Komplexní číslo z je uspořádaná dvojice reálných čísel: $z = [x, y]$.

- x ... reálná část; $\mathbf{Re}(z) = x$
- y ... imaginární část; $\mathbf{Im}(z) = y$



Algebraický tvar komplexního čísla

$$z = x + yi$$

- i imaginární jednotka
- $\mathbf{Im}(z) = 0$ reálné číslo
- $\mathbf{Im}(z) \neq 0$ imaginární číslo
- $\mathbf{Re}(z) = 0$ ryze imaginární číslo

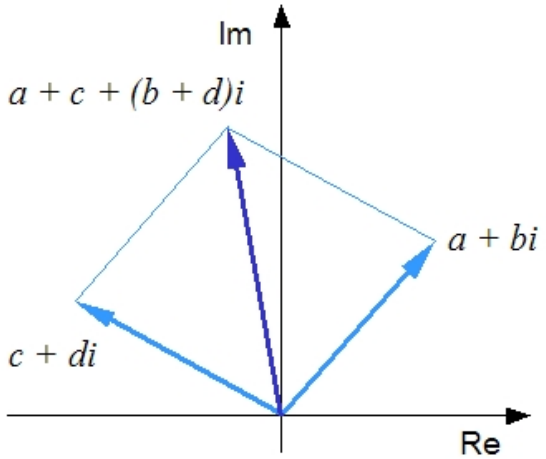
Základní operace

Základní operace s komplexními čísly v algebraickém tvaru $z = x + yi$:

pracujeme jako s dvojčleny, přitom $i^2 = -1$:

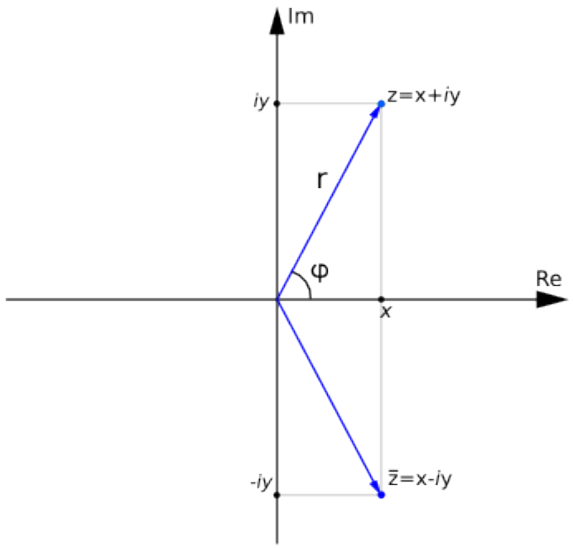
- sčítání: $(3 + 2i) + (-2 + i) = 1 + 3i$
- odčítání: $(3 + 2i) - (-2 + i) = 5 + i$
- násobení:

$$(3 + 2i)(-2 + i) = -6 - 4i + 3i + 2i^2 =$$
$$= -6 - i + 2 \cdot (-1) = -8 - i$$



Absolutní hodnota komplexního čísla

Komplexní číslo v algebraickém tvaru $z = x + yi$:



- komplexně sdružené číslo $\bar{z} = x - yi$
- velikost = absolutní hodnota: $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Dělení komplexních čísel

Komplexní čísla v algebraickém tvaru $z = x + yi$.

Dělení komplexních čísel:

- $\frac{a+bi}{c+di}$ není ve tvaru $z = x + yi \Rightarrow$ rozšíříme zlomek číslem komplexně sdruženým ke jmenovateli
- protože $\sqrt{z\bar{z}} = |z| \in \mathbf{R}$, dostaneme ve jmenovateli reálné číslo
- příklad:
  $\frac{3+2i}{-2+i} = \frac{(3+2i)}{(-2+i)} \cdot \frac{(-2-i)}{(-2-i)} = \frac{(3+2i)(-2-i)}{2^2-i^2} = \frac{-4-7i}{5} = -\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$

Kdo neměl na střední škole, může dostudovat například z `https://matematika.cz/komplexni-cisla`.

1 Komplexní čísla

2 Polynomy – opakování ze střední školy

3 Připomínka přednášky o maticích

4 Přednáška o vlastních číslech

Kořeny polynomu

Důsledek základní věty algebry

Polynom $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$
stupně $n \geq 1$ s reálnými koeficienty a_i
má právě n komplexních kořenů.

- nemusí být vzájemně různé – každý kořen se počítá tolikrát, jaká je jeho násobnost
- je-li $z = a + bi$ kořenem $P(x)$,
  je i komplexně sdružené $\bar{z} = a - bi$ kořen $P(x)$

Polynom s celočíselnými koeficienty

Důsledek Viètových vztahů

Má-li polynom $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$
s celočíselnými koeficienty a_i celočíselný kořen x_0,
pak je tento kořen dělitelem absolutního členu a_0.

- vypíšeme všechny dělitele absolutního členu
- zjistíme, jestli je některý z nich kořenem – začínáme od nejsnazších
- možno použít Hornerovo schéma
- najdeme-li kořen α, vydělíme polynom kořenovým činitelem $(x - \alpha)$
- není-li žádný z dělitelů kořenem polynomu, pak nemá žádné celočíselné kořeny; může mít neceločíselné ($\frac{4}{3}$, $\sqrt{2}$, ...)

Příklad

Najděte kořeny polynomu $P(x) = x^4 - x^3 - 13x^2 + x + 12$.

- má-li polynom $P(x)$ celočíselný kořen, pak je tento kořen dělitelem čísla 12, tj. může to být $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$,
- začneme nejsnadnějším – vyzkoušíme $x_1 = 1$: je kořen $P(x)$,
- vydělíme kořenovým činitelem: $P(x) : (x - 1) = x^3 - 13x - 12$,
- má-li polynom $P_1(x) = x^3 - 13x + 12$ celočíselný kořen, pak je dělitelem čísla 12, tj. může to být $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$,
- opět vyzkoušíme $x_1 = 1$: není kořen $P_1(x)$, ale $x_2 = -1$ je kořen $P_1(x)$
- znovu vydělíme kořenovým činitelem: $P_1(x) : (x + 1) = x^2 - x - 12$,
- $x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$,

kořeny polynomu $P(x)$ jsou $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$, $x_4 = -3$.

1 Komplexní čísla

2 Polynomy – opakování ze střední školy

3 Připomínka přednášky o maticích
- Hodnost matice
- Singulární matice

4 Přednáška o vlastních číslech

Hodnost matice

$\mathbf{A}$ je matice s n řádky a m sloupci.

- Hodnost matice $\mathrm{h}(\mathbf{A})$ je dimenze prostoru generovaného řádkovými vektory matice $\mathbf{A}$
- Defekt matice $\mathrm{def}(\mathbf{A})$ je rozdíl počtu *sloupců* matice a její hodnosti:

$$\mathrm{def}(\mathbf{A}) = m - \mathrm{h}(\mathbf{A})$$

Singulární matice

Čtvercová $n \times n$ matice $\mathbf{A}$ je singulární $\Leftrightarrow$

- její hodnost $\mathrm{hod}(\mathbf{A})$ je menší než n,
- $\det(\mathbf{A}) = 0$,
- neexistuje k ní inverzní matice,
- homogenní soustava lineárních rovnic $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{o}$ má netriviální (tj. nenulové) řešení
- ...

1 Komplexní čísla

2 Polynomy – opakování ze střední školy

3 Připomínka přednášky o maticích

4 Přednáška o vlastních číslech
- Vlastní čísla
- Vlastní vektory

Vlastní čísla matice

$\mathbf{A}$ ... čtvercová matice $n \times n$

- $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$ ... charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$
  polynom jedné proměnné λ stupně n
- $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = 0$ ... charakteristická rovnice matice $\mathbf{A}$
- kořeny charakteristické rovnice ... vlastní čísla matice $\mathbf{A}$
  (= charakteristické hodnoty)
- (algebraická) násobnost vlastního čísla λ_0 ... násobnost λ_0 jako kořene charakteristického polynomu
  tj. největší k, pro které $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (\lambda - \lambda_0)^k p(\lambda)$
- jednoduché vlastní číslo ... s násobností 1

Vlastní vektory matice

λ_0 ... vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ typu $n \times n$

- vlastní (= charakteristický) vektor matice $\mathbf{A}$ náležející k vlastnímu číslu λ_0 je nenulový vektor $\vec{v} \in \mathbf{R}^n$, který je řešením rovnice

$$(\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{E})\, \vec{v} = \vec{o}$$

- dimenze prostoru vlastních vektorů je menší nebo rovna násobnosti vlastního čísla λ_0
- vlastní vektory náležející různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé