Lineární algebra

Příprava na 2. cvičení

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

October 11, 2018

1. Opakování z prvního cvičení
   - Podprostory
   - Lineární (ne)závislost
2. Přednáška 2
   - Lineární obal
   - Množina generátorů VP
   - Báze a dimenze
   - Souřadnice vzhledem k bázi

Procvičte si podprostory

Zjistěte, které z uvedených množin jsou podprostory vektorového prostoru $\mathbf{R}^2$. Dokažte.

- $\mathcal{M}_1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 2x = 3y\}$
- $\mathcal{M}_2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x + 2xy = 0\}$
- $\mathcal{M}_3 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; xy \geq 0\}$

Lineární (ne)závislost

Určete, zda jsou následující množiny vektorů lineárně závislé nebo nezávislé:

$$(1, 0, -1, 1)$$
$$(0, 2, 1, 1)$$
$$(1, 1, 1, -2)$$
$$(1, -1, 1, 0)$$

$$(1, 2, 0, 0)$$
$$(0, 1, 1, 0)$$
$$(1, 0, 0, 1)$$
$$(1, 1, -1, 1)$$

$$(4, 7, 1, 0)$$
$$(2, 3, -1, 2)$$
$$(1, 2, 1, -1)$$
$$(5, 7, -4, 7)$$

$$(2, 1, 3, -1)$$
$$(-1, 1, -3, 1)$$
$$(4, 5, 3, -1)$$
$$(1, 5, -3, 1)$$

Příklady s parametrem

Zjistěte, pro které hodnoty parametru $a \in \mathbf{R}$ jsou dané množiny vektorů lineárně závislé a pro které jsou lineárně nezávislé:

$$(1,1,1)$$
$$(1,a,1)$$
$$(2,2,a)$$

$$(a,-2,1)$$
$$(3,2a,-1)$$
$$(a^2,1,a-1)$$

Základní pojmy z druhé přednášky

- generátory vektorového prostoru
  - lineární obal množiny vektorů: $\langle A \rangle$
  - množina generátorů vektorového prostoru
- dimenze a báze vektorového prostoru
  - báze vektorového prostoru
  - existence báze
  - dimenze vektorového prostoru
  - jednoznačnost dimenze
  - $n-$rozměrný vektorový prostor
  - standardní (kanonická) báze
  - dimenze prostoru $\mathbf{R}^n$
- souřadnice vektoru vzhledem k bázi: $\langle \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{B}}$

Lineární obal

- vektorový prostor $\mathbf{V}$
- $\mathbf{A} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\} \subseteq \mathbf{V}$ množina vektorů z $\mathbf{V}$

Lineární obal množiny $\mathbf{A}$

je množina všech lineárních kombinací vektorů z $\mathbf{A}$:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \{\vec{v} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{x}_m; \lambda_i \in \mathbf{R}, \vec{x}_i \in \mathbf{A}, i = 1, \ldots m\}.$$

- $\mathbf{A} \subseteq \langle \mathbf{A} \rangle \subseteq \mathbf{V}$
- $\langle \mathbf{A} \rangle$ je podprostor $\mathbf{V}$
- $\mathbf{A} = \langle \mathbf{A} \rangle$ právě když $\mathbf{A}$ je podprostor $\mathbf{V}$
- $\langle (\langle \mathbf{A} \rangle) \rangle = \langle \mathbf{A} \rangle$

Množina generátorů VP

- vektorový prostor $\mathbf{V}$
- $\mathbf{U}$ podprostor $\mathbf{V}$
- $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}$ množina vektorů z $\mathbf{V}$

Množina generátorů

Jestliže $\langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{U}$, nazveme $\mathbf{A}$ množinou generátorů prostoru $\mathbf{U}$.

Báze vektorového prostoru

- vektorový prostor $\mathbf{V}$
- $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\} \subseteq \mathbf{V}$ množina vektorů z $\mathbf{V}$

Báze vektorového prostoru

Množina $\mathcal{B}$ je báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je lineárně nezávislá množina generátorů prostoru $\mathbf{V}$.

- každý nenulový VP má bázi
- z každé množiny generátorů VP je možné vybrat bázi
  - **Důkaz:** Buď $\mathbf{A} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\} \subseteq \mathbf{V}$ množina generátorů $\mathbf{V}$. Pokud je $\mathbf{A}$ LN, je to hledaná báze. Je-li $\mathbf{A}$ LZ, lze jeden vektor vyjádřit jako LK ostatních: $\vec{x}_1 = \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{x}_m$. Pokud tento vektor vynecháme, je zbytek stále množina generátorů (rozmyslete proč). Je tento zbytek LN? Pokud není, pokračujeme. V každém kroku množinu zmenšíme, proto nakonec musíme někdy skončit.

Dimenze vektorového prostoru

Věta o dimenzi

Má-li vektorový prostor konečnou bázi, pak jsou *všechny* jeho báze konečné a mají stejný počet prvků.

Definice

Dimenze vektorového prostoru je počet prvků jeho báze.
Značení: $\dim \mathbf{V}$.

- je-li $\mathbf{U}$ podprostorem $\mathbf{V}$, pak je $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{V}$
- $\dim \mathbf{V} = n \Rightarrow$ každá podmnožina, která má více než n prvků, je LZ
- $\dim \mathbf{V} = n \Rightarrow$ každá LN n-prvková podmnožina je jeho bází
- dimenze nulového vektorového prostoru $O = \{\vec{o}\}$ je nula

Dimenze prostoru $\mathbf{R}^n$

Standardní báze prostoru $\mathbf{R}^n$:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\
\vec{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\
\vec{e}_3 &= (0, 0, 1, \dots, 0) \\
&\dots \\
\vec{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1)
\end{aligned}$$

Důsledek:

$$\dim \mathbf{R}^n = n$$

Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

- vektorový prostor $\mathbf{V}$
- $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ uspořádaná báze $\mathbf{V}$
  (tj. pevně dané pořadí vektorů)
- $\mathcal{B}$ je množina generátorů $\Rightarrow$ pro každý vektor $\vec{v} \in \mathbf{V}$
  existují $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbf{R}$, že $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{u}_m$
- $\mathcal{B}$ je LN $\Rightarrow$ tato LK je jednoznačně daná

Definice

- $\langle \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2 \ldots, \lambda_m)$ je vektor souřadnic (krátce souřadnice) vektoru $\vec{v}$ vzhledem k uspořádané bázi $\mathcal{B}$
- λ_i je i-tá souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k uspořádané bázi $\mathcal{B}$