Vektorové prostory I

Lineární algebra – přednáška 1

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

September 29, 2021

Aritmetické vektory

Aritmetický vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, každé $x_i \in \mathbf{R}$

- rovnost vektorů $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$:
  $\vec{x} = \vec{y}$ právě když $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots$, $x_n = y_n$
- součet vektorů $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ a $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$:

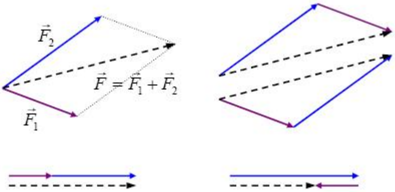
$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots x_n + y_n)$$

- násobek vektoru $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ skalárem $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$\lambda \cdot \vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

Vektory ve fyzice

- = veličina, která má velikost a směr
- znázornění "šipkou"
- sčítání vektorů a násobení skalárem má stejné vlastnosti jako v $\mathbf{R}^n$



"Matematika je umění dávat stejná jména různým věcem."

Jules Henri Poincarè (1854-1912)

Vektorový prostor nad množinou $\mathbf{R}$ ...

...je množina $\mathbf{V} \neq \emptyset$ s operacemi *sčítání* $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ a *násobení skalárem* $\mathbf{R} \times \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, ve které $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbf{V}$ a $\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$ platí:

- komutativita sčítání: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$
- asociativita sčítání: $(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z})$
- kompatibilita násobení: $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}) = (\lambda\mu) \cdot \vec{x}$
- distributivita násobení skalárem vzhledem ke sčítání vektorů: $\lambda(\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}$
- distributivita násobení skalárem vzhledem ke sčítání skalárů: $(\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}$
- invariance při násobení jedničkou: $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$
- existence nulového vektoru: $0 \cdot \vec{x} = 0 \cdot \vec{y}$

Vektorový podprostor

- vlastnosti operací vektorového prostoru (asociativita, distributivita atd.) se přenášejí i na všechny jeho podmnožiny
- každá podmnožina vektorového prostoru ale není vektorovým prostorem

Vektorový podprostor

Vektorový podprostor prostoru $\mathbf{V}$ je jeho podmnožina $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{V}$, která je uzavřená vzhledem k operacím sčítání a násobení skalárem, tzn.

- pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbf{M}$ je součet $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbf{M}$
- pro každé $\vec{x} \in \mathbf{M}$ a $\lambda \in \mathbf{R}$ je násobek $\lambda \cdot \vec{x} \in \mathbf{M}$

Lineární kombinace

- Lineární kombinace vektorů $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m$ je každý vektor, který je možné zapsat jako

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{x}_m,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbf{R}$.

- triviální lineární kombinace: všechna $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$
- netriviální lineární kombinace: alespoň jedno λ_i je nenulové
- nulová lineární kombinace je rovna nulovému vektoru:

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{o}$$

Lineární (ne)závislost

Množina vektorů $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_m\} \subseteq \mathbf{V}$ je

- lineárně nezávislá, když z rovnice

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{o}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$$

  plyne

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0.$$

- lineárně závislá, když existuje taková netriviální lineární kombinace, že

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{o}.$$

Vlastnosti lineární (ne)závislosti

Každá množina obsahující nulový vektor je LZ

Důkaz: netriviální LK $1 \cdot \vec{o} = \vec{o}$

Množina je LZ $\Leftrightarrow$ jeden z vektorů je možné vyjádřit jako LK ostatních

Důkaz:

1. LZ $\Rightarrow$ ex. netriviální LK $\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{x}_m = \vec{o}$;
   buď například $\lambda_1 \neq 0$
   $$\Rightarrow \quad \vec{x}_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \cdot \vec{x}_2 + \cdots + \frac{\lambda_m}{\lambda_1} \cdot \vec{x}_m$$
2. buď například $\vec{y}_1 = \lambda_2 \vec{y}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{y}_m$;
   pak netriviální LK
   $$-1 \cdot \vec{y}_1 + \lambda_2 \vec{y}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{y}_m = \vec{o}$$