Vektorové prostory II

Lineární algebra – přednáška 2

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

October 12, 2020

- Lineární obal
- Množina generátorů VP
- Báze a dimenze
- Souřadnice vzhledem k bázi

Lineární obal

- vektorový prostor $\mathbf{V}$
- $\mathbf{A} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\} \subseteq \mathbf{V}$ množina vektorů z $\mathbf{V}$

Lineární obal množiny $\mathbf{A}$

je množina všech lineárních kombinací vektorů z $\mathbf{A}$:

$$\langle \mathbf{A} \rangle = \{\vec{v} = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{x}_m; \lambda_i \in \mathbf{R}, \vec{x}_i \in \mathbf{A}, i = 1, \ldots m\} .$$

- $\mathbf{A} \subseteq \langle \mathbf{A} \rangle \subseteq \mathbf{V}$
- $\langle \mathbf{A} \rangle$ je podprostor $\mathbf{V}$
- $\mathbf{A} = \langle \mathbf{A} \rangle$ právě když $\mathbf{A}$ je podprostor $\mathbf{V}$
- $\langle (\langle \mathbf{A} \rangle) \rangle = \langle \mathbf{A} \rangle$

Množina generátorů VP

- vektorový prostor $\mathbf{V}$
- $\mathbf{U}$ podprostor $\mathbf{V}$
- $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}$ množina vektorů z $\mathbf{V}$

Množina generátorů

Jestliže $\langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{U}$, nazveme $\mathbf{A}$ množinou generátorů prostoru $\mathbf{U}$.

Báze vektorového prostoru

- vektorový prostor $\mathbf{V}$
- $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\} \subseteq \mathbf{V}$ množina vektorů z $\mathbf{V}$

Báze vektorového prostoru

Množina $\mathcal{B}$ je báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}$ je lineárně nezávislá množina generátorů prostoru $\mathbf{V}$.

- každý nenulový VP má bázi
- z každé množiny generátorů VP je možné vybrat bázi
  - **Důkaz:** Buď $\mathbf{A} = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m\} \subseteq \mathbf{V}$ množina generátorů $\mathbf{V}$. Pokud je $\mathbf{A}$ LN, je to hledaná báze. Je-li $\mathbf{A}$ LZ, lze jeden vektor vyjádřit jako LK ostatních: $\vec{x}_1 = \lambda_2\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_m\vec{x}_m$. Pokud tento vektor vynecháme, je zbytek stále množina generátorů (rozmyslete proč). Je tento zbytek LN? Pokud není, pokračujeme. V každém kroku množinu zmenšíme, proto nakonec musíme někdy skončit.

Dimenze vektorového prostoru

Věta o dimenzi

Má-li vektorový prostor konečnou bázi, pak jsou *všechny* jeho báze konečné a mají stejný počet prvků.

Definice

Dimenze vektorového prostoru je počet prvků jeho báze.
Značení: $\dim \mathbf{V}$.

- je-li $\mathbf{U}$ podprostorem $\mathbf{V}$, pak je $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{V}$
- $\dim \mathbf{V} = n \Rightarrow$ každá podmnožina, která má více než n prvků, je LZ
- $\dim \mathbf{V} = n \Rightarrow$ každá LN n-prvková podmnožina je jeho bází
- dimenze nulového vektorového prostoru $O = \{\vec{o}\}$ je nula

Dimenze prostoru $\mathbf{R}^n$

Standardní báze prostoru $\mathbf{R}^n$:

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_1 &= (1, 0, 0, \dots, 0) \\
\vec{e}_2 &= (0, 1, 0, \dots, 0) \\
\vec{e}_3 &= (0, 0, 1, \dots, 0) \\
&\dots \\
\vec{e}_n &= (0, 0, 0, \dots, 1)
\end{aligned}
$$

Důsledek:

$$\dim \mathbf{R}^n = n$$

Souřadnice vektoru vzhledem k bázi

- vektorový prostor $\mathbf{V}$
- $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ uspořádaná báze $\mathbf{V}$
  (tj. pevně dané pořadí vektorů)
- $\mathcal{B}$ je množina generátorů $\Rightarrow$ pro každý vektor $\vec{v} \in \mathbf{V}$
  existují $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$, že $\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_m \vec{u}_m$
- $\mathcal{B}$ je LN $\Rightarrow$ tato LK je jednoznačně daná

Definice

- $\langle \vec{v} \rangle_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_m)$ je vektor souřadnic (krátce souřadnice) vektoru $\vec{v}$ vzhledem k uspořádané bázi $\mathcal{B}$
- λ_i je *i*-tá souřadnice vektoru $\vec{v}$ vzhledem k uspořádané bázi $\mathcal{B}$