Skalární součin

Lineární algebra – přednáška 8

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

November 23, 2020

Definice skalárního součinu

Buď **V** vektorový prostor nad množinou **R**.
Skalární součin na prostoru **V** je takové zobrazení $\varphi : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$,
(tj. každé dvojici vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ přiřadí reálné číslo),
že pro všechny vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbf{V}$ a pro každé reálné číslo α platí:

1. $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(\vec{v}, \vec{u})$
2. $\varphi(\alpha\vec{u}, \vec{v}) = \alpha\varphi(\vec{u}, \vec{v})$
3. $\varphi(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}) = \varphi(\vec{u}, \vec{w}) + \varphi(\vec{v}, \vec{w})$
4. je-li $\vec{u} \neq \vec{o}$, pak $\varphi(\vec{u}, \vec{u}) > 0$.

Značení: $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$; tj.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $(\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
4. je-li $\vec{u} \neq \vec{o}$, pak $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

Definice velikosti vektoru

Mějme **V** vektorový prostor nad **R** a na něm definovaný skalární součin. Definujeme velikost neboli normu $\|\vec{v}\|$ (někdy se značí $|\vec{v}|$) vektoru $\vec{v}$ pomocí vzorce

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Jestliže platí $\|\vec{v}\| = 1$, pak se $\vec{v}$ nazývá jednotkový vektor (též normovaný vektor).

Příklad:

- $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ je jednotkový vektor
- $(1, 1, 1)$ není jednotkový vektor

Vlastnosti normy

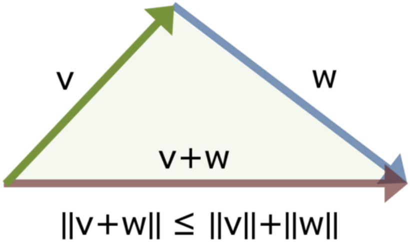
- $\|\vec{o}\| = 0$
- je-li $\vec{u} \neq \vec{o}$, pak $\|\vec{u}\| > 0$
- pro libovolné reálné α platí $\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{u}\|$
- je-li $\vec{u} \neq \vec{o}$, pak $\frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u}$ je jednotkový vektor

Trojúhelníková nerovnost

Pro každé vektory $\vec{v}, \vec{w}$ ve vektorovém prostoru se skalárním součinem platí

Trojúhelníková nerovnost:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$



Ortogonalita (kolmost) vektorů

Definice

Mějme **V** vektorový prostor nad **R** a na něm definovaný skalární součin.
Dva vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou vzájemně ortogonální (neboli kolmé),
pokud platí $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Značíme $\vec{u} \perp \vec{v}$.

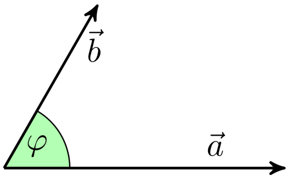
Pozorování: každý vektor je kolmý na nulový vektor

Pythagorova věta

Jsou-li na sebe vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ kolmé, pak $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

Geometrický význam skalárního součinu

Odchylka vektorů = orientovaný úhel



$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$$

Vektorový součin

Vektorový prostor $\mathbf{R}^3$, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Definice

Označme $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$. Pak

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2, u_3 v_1 - u_1 v_3, u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Vlastnosti vektorového součinu

- *antikomutativní:* $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$
- *distributivní* vůči sčítání: $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- NENÍ asociativní
- *homogenní:* pro $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ je $(\alpha\vec{u}) \times (\beta\vec{v}) = \alpha\beta\,(\vec{u} \times \vec{v})$
- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$ právě když $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jsou lineárně závislé
- jsou-li $\vec{u}$ a $\vec{v}$ lineárně nezávislé a φ je jejich odchylka, pak

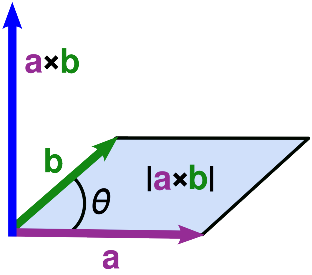
$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin\varphi$$

- vektor $\vec{u} \times \vec{v}$ je kolmý na vektor $\vec{u}$ i na vektor $\vec{v}$

Geometrický význam vektorového součinu

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin \Theta$$

- velikost $\vec{a} \times \vec{b}$ je obsah rovnoběžníku se stranami $\vec{a}$ a $\vec{b}$
- směr $\vec{a} \times \vec{b}$ je kolmý na rovinu danou vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$



Obrázky:

- Oleg Alexandrov, CC-0, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cross_parallelogram.png
- Martin Thoma, CC-BY, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dot-product-3.3.svg
- Brews ohare & Quartl, CC-BY-SA, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vector_triangle_inequality_vw.PNG