

# *Matematické modelování*

*Matematické metody pro ITS (11MAMY)*

*Jan Příkryl, Bohumil Kovář*

*1. přednáška 11MAMY*

*středa 17. března 2021*

verze: 2022-03-29 10:11

## *Obsah*

<i>Matematické modelování systémů</i>	2
<i>Modelování je umění kompromisu</i>	3
<i>Jaké cíle může modelování dosáhnout?</i>	4
<i>Klasifikace modelů</i>	4
<i>Fáze modelování</i>	5
<i>Model systému</i>	6
<i>Dynamické systémy</i>	8
<i>Vnější popis systémů</i>	10
<i>Vnitřní popis systémů</i>	11
<i>Iterace</i>	13
<i>Iterace rovnice ceny</i>	13
<i>Spojité</i>	14
<i>Diracův impuls</i>	14
<i>Jednotkový skok</i>	14
<i>Exponenciála</i>	15
<i>Periodické a harmonické funkce</i>	15
<i>Diskrétní</i>	16
<i>Diskrétní jednotkový impuls a skok</i>	16
<i>Diskrétní sinusová posloupnost</i>	17

<i>Odezva systému</i>	18
<i>Diskrétní systém</i>	18
<i>Lineární a nelineární</i>	18
<i>Časově invariantní, resp. stacionární systém</i>	20
<i>Kauzální, příčinný systém</i>	21
<i>Spojité systém</i>	22
<i>Autonomní a neautonomní systém</i>	24
<i>Stabilita</i>	24

Tento text je do jisté míry experimentálním pískovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v  $\text{\LaTeX}$ ové třídě beamer do textu vysázeného pomocí *tuft*-handout. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

Cílem předmětu *Matematické metody pro ITS* je seznámit posluchače se základními teoretickými poznatky a postupy, které jsou nezbytné pro matematické modelování jevů v dopravě. Předmět je základním stavebním kamenem navazujících odborných předmětů, které se zabývají detailně jednotlivými aspekty ITS. Měl by studentům poskytnout i základy pro magisterské předměty, jako je teorie řízení, identifikace parametrů systému či modelování stochastických systémů a procesů.

Problematika matematického modelování systémů a procesů je velmi rozsáhlá. Tento text se proto soustředí zejména na oblast modelování lineárních a časově invariantních (LTI) spojitých a diskretních systémů ve stavové formě a na statistické metody učení z naměřených dat (angl. *statistical learning*).

## *Matematické modelování systémů*

Co je to vlastně matematické modelování?

Modely vždy nějakým způsobem popisují naše přesvědčení o tom, jak svět funguje. Modely nás provázejí od nepaměti: například obyčejná mapa je vlastně dvourozměrný model našeho pohledu na krajinu; architekti často studují tvary plánovaných budov na jejich zmenšeninách ze sádky a dřeva, aby zjistili, jak bude objekt působit po zasazení do krajiny. Modely jsou většinou zjednodušením reality, postihují jen to, co nás pro studium daného problému opravdu zajímá. Pro nás nepodstatné detaily model zanedbává (u mapy to například mohou být různé malé detaily, u architektonického modelu potom vnitřní vybavení místností budovy).

V případě témat *matematického modelování*, která budeme probírat v tomto kurzu, používáme k vytváření našich přibližných představ o okolním světě matematický aparát: *V matematickém modelování naše přesvědčení o fungování světa překládáme do jazyka matematiky.*

Má to řadu výhod:

- a) Matematika je *velmi přesný jazyk*. Tato přesnost nám pomáhá formulovat myšlenky a identifikovat základní předpoklady pro vytvářený model.
- b) Matematika je *výstižný jazyk s dobře definovanými pravidly* pro manipulaci s výrazy.
- c) Všechny výsledky, které matematici dokázali v průběhu minulých stovek let *jsou nám k dispozici* a můžeme je pro náš model využít.
- d) K provedení numerických výpočtů *můžeme dnes použít počítače*.

### *Modelování je umění kompromisu*

Hned na úvod je vhodné zdůraznit to, co jsme už zmínili výše: značnou část matematického modelování tvoří *kompromisy*. Většina systémů, jež na sebe v reálném světě působí, je totiž příliš složitých na to, abychom je mohli modelovat v plném rozsahu a mnohdy to ani není možné, protože potřebné jemné detaily fungování modelovaného systému ani neznáme. Proto je prvním stupněm kompromisu snaha *identifikovat nejdůležitější části systému* – ty budou do modelu zahrnuty, zbytek bude zanedbán.

Druhá úroveň kompromisu se týká množství matematických operací, které má smysl při modelování provádět: I když matematický aparát má potenciál v naprosté obecnosti popsat vlastnosti modelovaného objektu, tento popis kriticky závisí kriticky na formě použitého matematického aparátu. Malé změny ve struktuře rovnic, popisujících model, přitom mohou vyžadovat obrovské změny v matematických metodách, použitých k jejich řešení (například už v případě, kdy od lineárních modelů – na něž stačí celkem silný aparát lineární algebry – pokročíme k modelování pomocí nelineárních rovnic). Složitější matematické metody vyžadují více času k řešení problému a po zpřesnění matematického popisu můžeme narazit na situaci, kdy přesnější model vyžaduje na vyhodnocení podstatně více času, resp. rychlá výpočetní metoda pro přibližné vyhodnocení takového modelu dává výsledky, jež jsou zatíženy větší nepřesností, než výsledky, poskytnuté jednodušším modelem. Je tedy třeba *obezřetně volit typ modelovacího aparátu s ohledem na přesnost a rychlost vyhodnocení modelu.*

### Jaké cíle může modelování dosáhnout?

Pro použití matematického modelu je v praxi celá řada různých důvodů a model používáme jako prostředek k dosažení různých cílů. Jak dobře je přitom nějakého určitého cíle dosaženo, to závisí jak na stavu našich znalostí o modelovaném systému, tak i na tom, jak dobře tento systém modelujeme.

Příklady řady cílů jsou:

- a) *Rozvoj vědeckého poznání* – prostřednictvím kvantitativního vyjádření současných znalostí o systému (stejně jako znázornit to, co víme, můžeme také ukázat, co nevíme);
- b) *Testování vlivu změn v systému*
- c) *Získat informace pro podporu rozhodování, včetně*
  - i. taktických rozhodnutí manažerů
  - ii. strategických rozhodnutí plánovačů

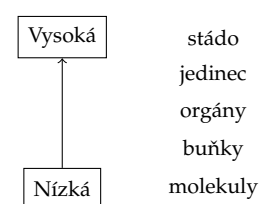
### Klasifikace modelů

Při studiu modelů je užitečné identifikovat hlavní kategorie modelů. Klasifikace jednotlivých modelů do těchto kategorií nám okamžitě řekne některé základní informace o jejich struktuře. Jedno rozdělení modelů je založeno na typu výsledku, který předpovídají. **Deterministické modely** ignorují náhodné variace a vždy tak predikují stejný výsledek z daného výchozího bodu. Na druhou stranu může mít model více statistickou povahu a může predikovat statistické rozdělení pravděpodobnosti možných výsledků. O takových modelech říkáme, že jsou **stochastické**.

Druhý přístup k rozlišování mezi typy modelů uvažuje míru pochopení reálného světa, na níž je model založen. Nejjednodušší vysvětlení uvažuje hierarchii organizačních struktur v rámci systému, který je modelovaný. Jedna taková hierarchie u zvířat je znázorněna na obrázku 1.

Model, který využívá velké množství teoretických informací, obecně popisuje, co se děje na jedné úrovni hierarchie tím, že uvažuje procesy na nižších úrovních. Jedná se o tzv. **mechanistické modely**, protože berou v úvahu mechanismy, prostřednictvím nichž dochází ke změnám. Naproti tomu u **empirických modelů** se nepřihlíží k mechanismu, jímž dochází ke změnám v systému. Namísto toho se pouze zaznamená, že ke změnám došlo, a model se snaží kvantitativně vysvětlit změny spojené s různými podmínkami.

Obě rozdělení, uvedená výše, tedy deterministický / stochastický a mechanistický / empirický, představují extrémní v rozsahu typů modelů. Mezi nimi leží celá škála typů modelů. Tyto dva přístupy ke klasifikaci se navíc vzájemně doplňují. Deterministický model



Obrázek 1: Hierarchie modelů – analogie se světem zvířat

může být například mechanistický nebo empirický (ale ne stochastický). Příklady čtyř širokých kategorií modelů vyplývajících z výše uvedené metody klasifikace jsou uvedeny v tabulce 1.

	<b>Empirický</b>	<b>Mechanistický</b>
<b>Deterministický</b>	Předpověď růstu dobytka z regresní závislosti na konzumaci potravy	Pohyb planet založený na Newtonovské mechanice, popsán diferenciálními rovnicemi
<b>Stochastický</b>	Analýza rozptylu výnosů odrůd přes lokality a roky	Genetika malých populací založená na Mendelovské dědičnosti popsáné pravděpodobnostními rovnicemi

Tabulka 1: Jedna z možných klasifikací modelů

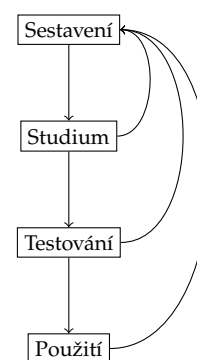
Za zmínku stojí ještě jeden další typ modelu, a to **model systému**. Ten je sestaven z řady dílčích modelů, z nichž každý popisuje podstatu nějaké z interagujících složek modelu. Výše uvedený způsob klasifikace pak je v pak vhodnější pro dílčích modely: v jednom modelu systémů mohou být použity různé typy dílčích modelů.

Mnoho publikací o modelování zmiňuje „simulační modely“. Proč tedy jsou nejsou zahrnuty v našem rozdělení? Důvodem tohoto zdánlivého opomenutí je, že *simulace* odkazuje na jeden způsob, jakým se provádějí modelové výpočty – tedy například počítačovou simulací. Vlastní model systému se nemění v závislosti na způsobu, jakým se provádí potřebné matematické výpočty, i když naše interpretace modelu může záviset na numerické přesnosti prováděných aproximací.

### Fáze modelování

Je užitečné rozdělit proces modelování do čtyř hlavních kategorií činnosti, a to na *tvorbu*, *studium*, *testování* a *používání* modelu. I když by to mohlo být hezké si myslet, že modelovací projekty postupují plynule od fáze tvorby modelu až po jeho použití, téměř vždy to tak není. Obecně platí, že vady zjištěné ve fázích studia a testování jsou korigovány návratem do fáze výstavby. Všimněte si, že pokud dojde ke jakýmkoliv změnám modelu, pak fáze studia a testování se musí opakovat. Schématické znázornění možných cest přes jednotlivé fáze modelování je uvedeno na obrázku 2.

Tento proces opakovaných iterací je pro modelovací projekty typický a je jedním z nejužitečnějších aspektů modelování, pokud jde o lepší pochopení toho, jak systém funguje. Toto rozdělení činnosti v oblasti modelování budeme používat i nadále a bude tvořit strukturu pro zbytek tohoto kurzu.



Obrázek 2: Jednotlivé fáze modelování

## Model systému

**Definice 1** (Systém). Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,

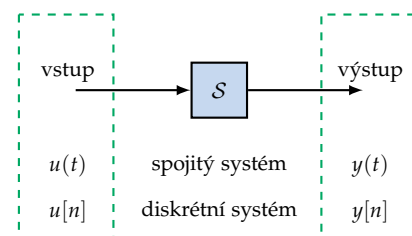
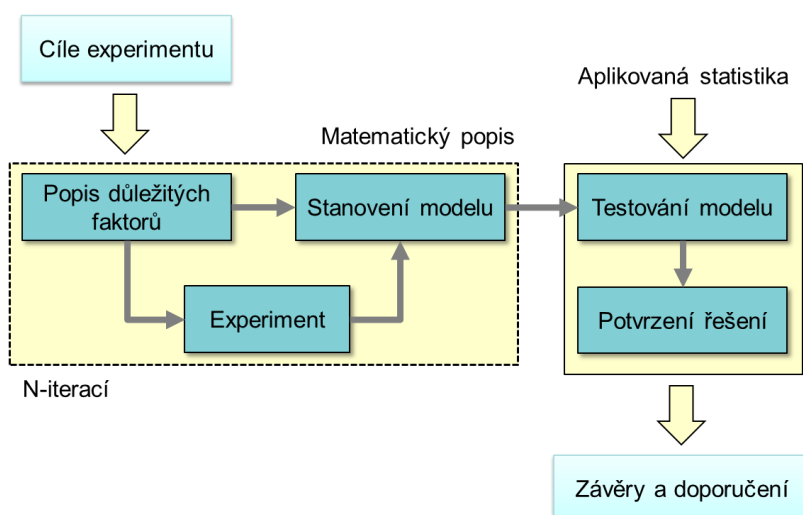
systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.

### Model

Za model můžeme pokládat náhradu nebo zjednodušení **skutečného objektu reálného světa** z hlediska jeho vlastností a funkčnosti.

Modelování je možné pouze pokud zavedeme **určitý stupeň** abstrakce a aproximace.



Obrázek 3: Vstup a výstup systému

Obrázek 4: Tvorba matematického modelu

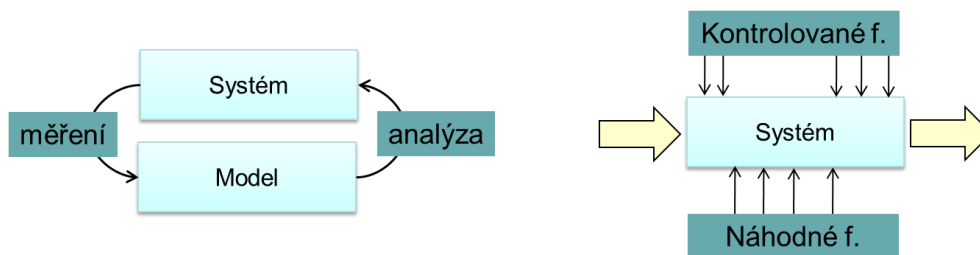
### ■ celá sekce je hodně na vodě ■

Při analýze navrženého modelu chceme učinit co možná nejsilnější rozhodnutí na základě malého množství dat. Správnost našeho návrhu je nutné statisticky vyhodnotit.

#### Problémy:

- Významné diference ve sledovaných parametrech mohou být způsobeny špatným návrhem modelu, případně měřeními dat
- Je těžké rozlišit, zda diference v datech jsou skutečné nebo způsobené „náhodným vlivem“.

Otázky:



Obrázek 5: Problémy při tvorbě modelu

Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?

Jak ověříme pevnost nového mostu?

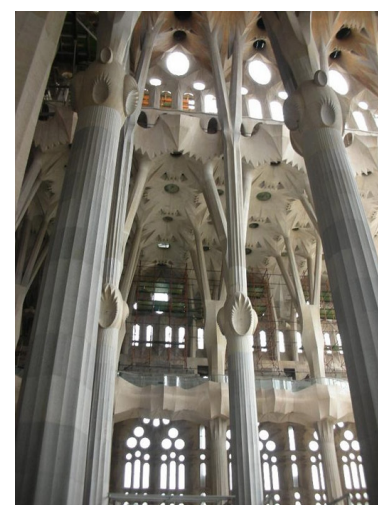
Jak ověříme bezpečnost softwaru zabezpečovacího zařízení?

Jak předpovíme dopravní zácpu na dálnici?

Jak zajistíme spolehlivou funkci navigace při výpadku signálu GPS?

Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!

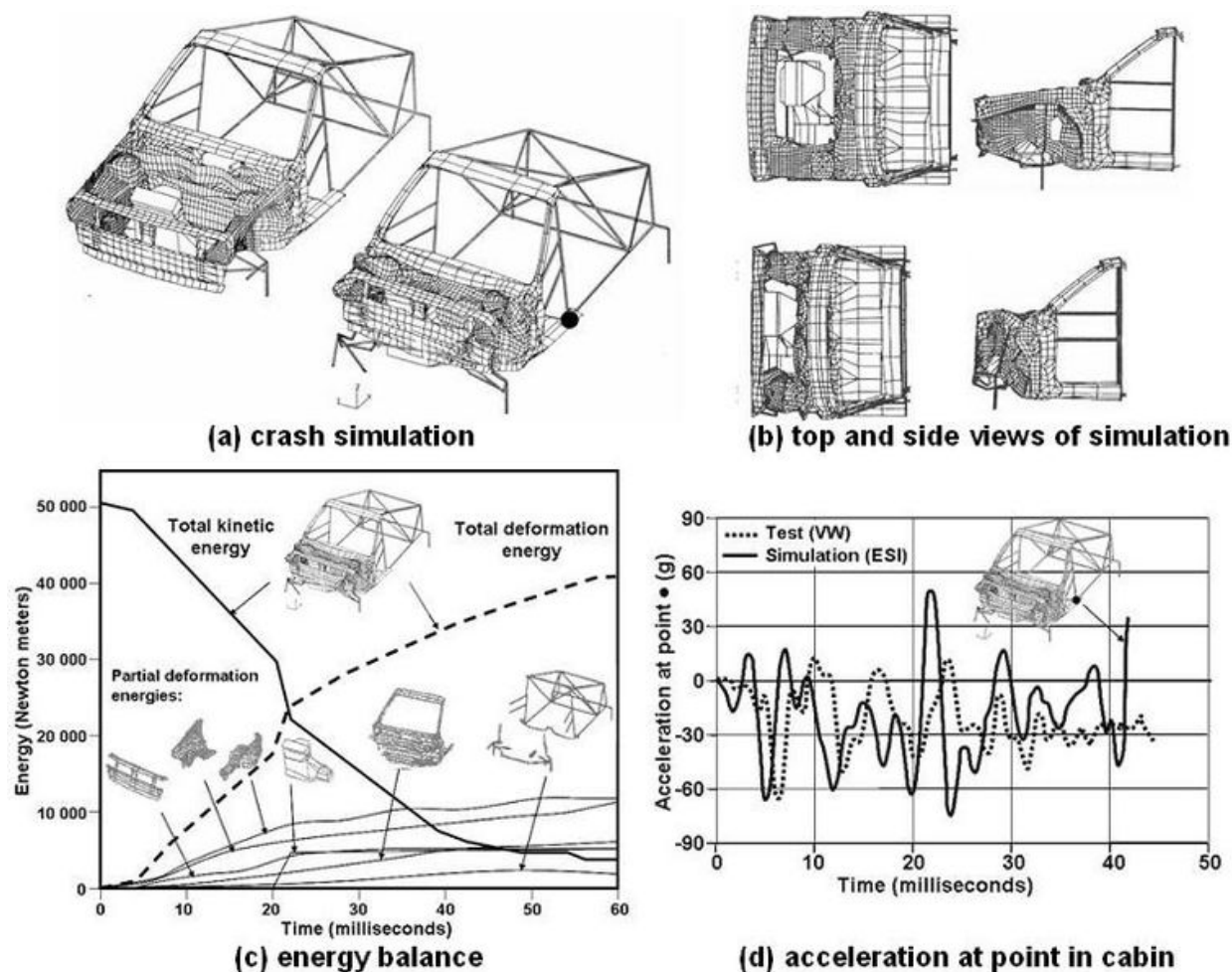
■ pokud nebude víc textu, je třeba změnit marginfigure na figure ■



Obrázek 6: Klenba Gaudího katedrály Sagrada Familia v Barceloně



Obrázek 7: Model klenby pro ověření statiky stavby, sestavený z provázků a plátěných pytlíčků s pískem



Obrázek 8: Virtuální crashtest první generace VW Polo

### Dynamické systémy

Dynamický systém má v každém okamžiku **stav**, daný množinou reálných čísel. Tento stav lze reprezentovat jako bod ve stavovém prostoru (tedy jako **vektor**, často **x**).

Evoluční pravidlo (rovnice vývoje stavu) popisuje přechody mezi jednotlivými stavy dynamického systému.

Toto pravidlo je

většinou deterministické, ale

může být stochastické.

Pozor: V matematice a fyzice tak nazýváme **systemy citlivé na počáteční podmínky** (dvojitě kyvadlo, Lorenzův atraktor)

*Příklad 2* (Kyvadlo). Jednoduchým případem dynamického systému je obyčejné fyzikální kyvadlo, jehož výchylka  $\theta$  od rovnovážné polohy je popsána rovnicí

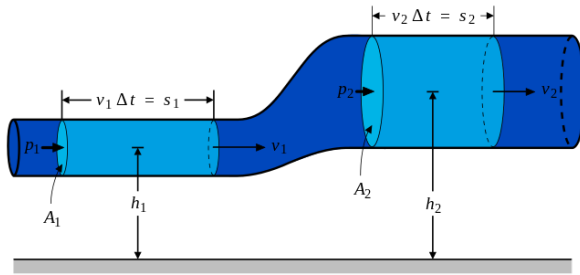
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$



kde  $\ell$  je délka ramene kyvadla a  $g$  je tíhové zrychlení místa, kde je kyvadlo umístěno.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{\nabla p}{\rho}$$



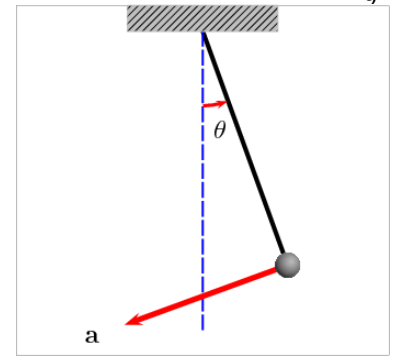
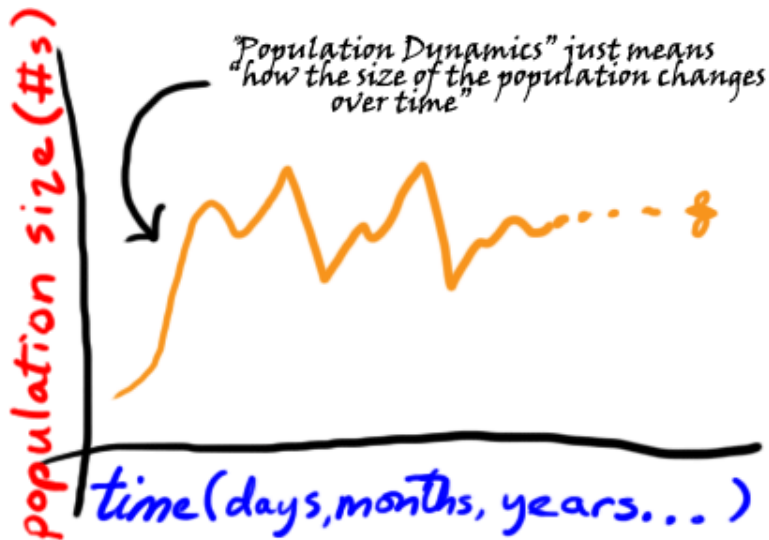
By MannyMax (original) - Image:BernoullisLawDerivationDiagram.png, CC BY-SA 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2870495>

Exponenciální růst

$$\dot{N} = rN$$

Logistický růst

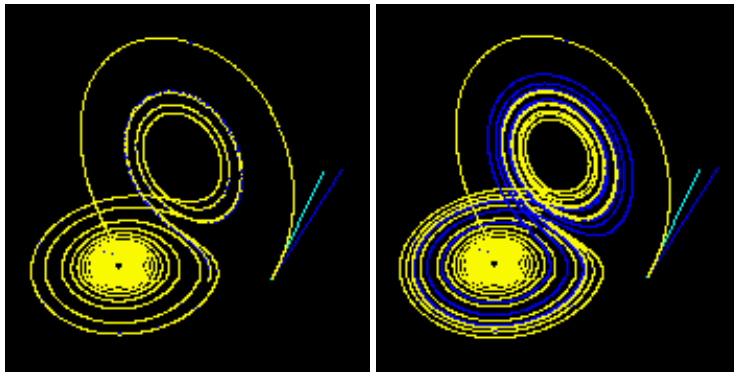
$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$



Obrázek 9: Obyčejné fyzikální kyvadlo

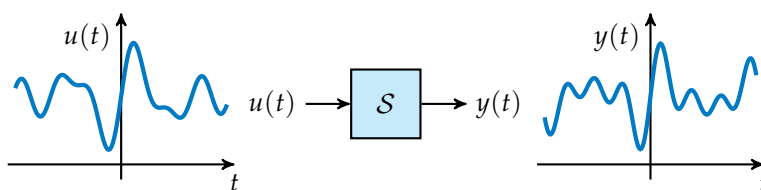


By George Ioannidis - Own work, CC BY 3.0, <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7920826>



### Vnější popis systému

Vnější popis vychází z popisu systému vektorem *vstupu*  $\mathbf{u}$  a vektorem *výstupu*  $\mathbf{y}$ .



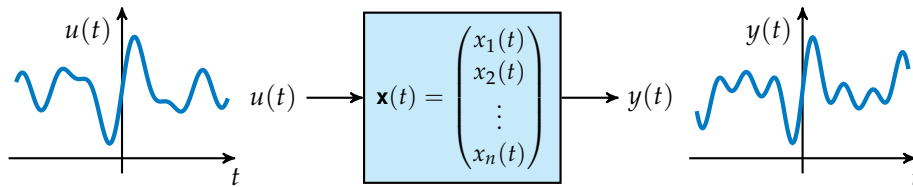
Stavový vektor systému  $\mathbf{x}$  nepoužíváme: Systém chápeme jako *černou skříňku*, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat její reakci na vnější události (signály, data).

Vnější model popisujeme *diferenciální rovnicí* pro systémy se spojitým časem a *diferenční rovnicí* pro systémy s diskretním časem. Uvedená rovnice je obecně vyššího řádu, než 1.

## Vnitřní popis systémů

Vnitřní, tzv. *stavový popis* systému používá k popisu dynamiky systému vektor *vnitřních stavů*  $\mathbf{x}$ .

Vektor vstupů  $\mathbf{u}$  a vektor výstupních veličin  $\mathbf{y}$  jsou druhotné veličiny vnitřního popisu.



Stavové modely popisujeme

soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a

soustavou diferenčních rovnic prvního řádu pro systémy s diskretním časem.

Modelování není samospasitelné:

model je pouze přiblížením reality,

výstupy modelu je proto vždy třeba ověřovat,

možné chyby jsou jak v modelu, tak i v jeho výpočtu.

Rozlišujeme dva kroky ověření:

**Verifikace:** Počítáme správný model.

**Validace:** Model počítá správně.

*Příklad 3* (RC článek). ■ **zde se to kvůli vloženému 'frame' z prezentace rozlomí, text má navazovat** ■

Napětí  $u_1(t)$  na RC článku je součet napětí na rezistoru  $u_R(t)$  a na kapacitoru  $u_C(t)$ :

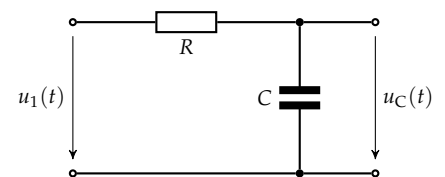
$$u_1(t) = u_R(t) + u_C(t). \quad (1)$$

Proud procházející obvodem  $i(t)$  a časový průběh napětí na rezistoru  $u_R(t)$  je možno vyjádřit jako

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t)$$

a proto

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = RC \frac{d}{dt} u_C(t). \quad (2)$$



Obrázek 10: RC článek

Dosazením  $u_R(t)$  do rovnice (1) získáme diferenciální rovnici prvního řádu pro časový průběh napětí na kapacitoru  $u_C(t)$ :

$$RC \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) = u_1(t).$$

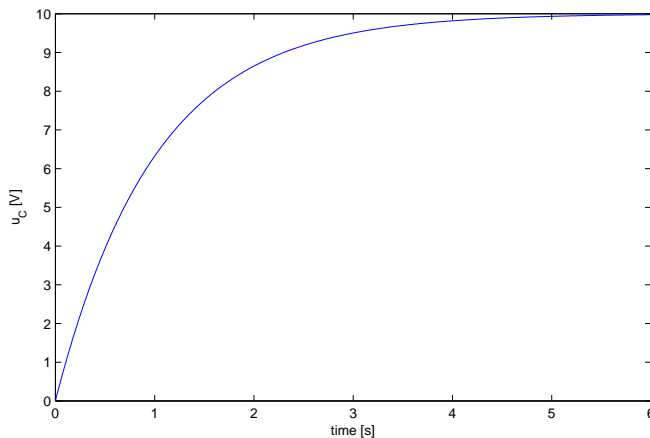
Řešení uvedené rovnice má pro všechna  $t \geq 0$ ,

$$\alpha = \frac{1}{RC},$$

$$u_1(t) = U_0$$

a pro počáteční hodnotu  $u_C(0) = 0$  tvar

$$u_C(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}).$$



Obrázek 11: Výstup RC článku

**Příklad 4 (Nabídka a poptávka).** Základní makroekonomický model rovnovážného trhu, kde nabídka produktu odpovídá poptávce po něm a na trhu se postupně ustálí cena produktu, není lineární. Představíme si jeho linearizovanou variantu, u níž je jako poptávka tak i nabídka lineárně závislá na ceně produktu.

### Rovnice nabídky

Nabídka *dnes* závisí na *včerejší* ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro  $C > 0$  platí

$$n[k] = Cc[k-1] + Au[k]. \quad (3)$$

### Rovnice poptávky

Poptávka *dnes* závisí na *dnešní* ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro  $D > 0$  platí

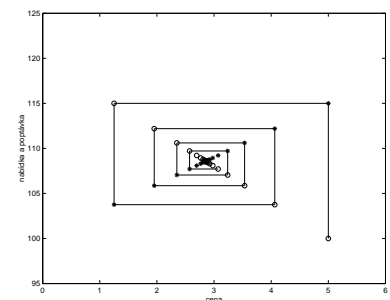
$$p[k] = -Dc[k] + Bu[k]. \quad (4)$$

Rovnost nabídky a poptávky

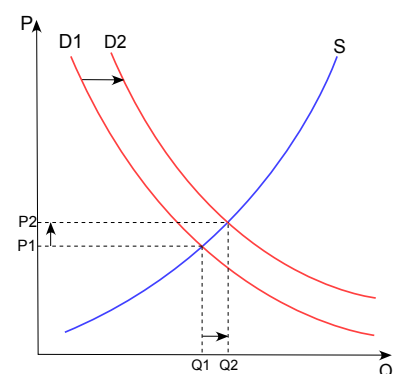
$$n[k] = p[k]$$

pak vede po dosazení z (3) a (4) na diferenciální rovnici prvního řádu

$$c[k] + \frac{C}{D}c[k-1] = \frac{B-A}{D}u[k]. \quad (5)$$



Obrázek 12: Pavučinkový diagram – variace ceny



Obrázek 13: Obecná závislost

## Iterace diferenční rovnice

### ■ doplnit text ■

#### Iterace rovnice ceny

Iterací rozumíme obecně opakování nějakého postupu, v matematice například opakované vyhodnocení funkce. Výsledky z jedné iterace se použijí jako vstup pro další iterační krok.

Iteračně například

hledáme nulové body funkce,  $f(x^*) = 0$

simulujeme vývoj *diskretizovaného* dynamického systému

Diferenční rovnici se vstupem  $u[n]$  a výstupem  $y[n]$  můžeme přepsat do tvaru

$$y[n+1] = f(y[n], y[n-1], \dots, u[n], u[n-1], \dots)$$

stanovit tzv. *počáteční podmínky* dané řádem systému a potom například pro  $n = 2, 3, \dots$  s počátečními podmínkami  $y[0], y[1], y[2]$  iterativně počítat výstupy diskrétního systému  $y[3], y[4], \dots$

Podobný postup se používá pro **numerickou simulaci spojitých systémů**. V tom případě se spojitě funkce vyhodnocují v předem stanovených časových okamžicích, výsledek není tedy zcela přesný.

Diferenční rovnici (5) přepíšeme do *kanonického tvaru*<sup>1</sup>

$$y[k] + \gamma y[k-1] = \beta u[k]$$

a postupnými iteracemi nalezneme pro  $u[k] = \mathbf{1}[k]$  a počáteční podmínku  $y[-1] = 0$  následující vztahy.

Pro  $k = 0$ :

$$\begin{aligned} y[0] + \gamma y[-1] &= \beta u[0] \\ y[0] &= \beta - \gamma y[-1] = \beta \end{aligned}$$

Pro  $k = 1$ :

$$\begin{aligned} y[1] + \gamma y[0] &= \beta u[1] \\ y[1] &= \beta - \gamma y[0] = \beta - \beta\gamma \end{aligned}$$

Pro  $k = 2$ :

$$\begin{aligned} y[2] + \gamma y[1] &= \beta u[2] \\ y[2] &= \beta - \gamma y[1] = \beta - \beta\gamma + \beta\gamma^2 \end{aligned}$$

Pro obecné  $n$ :

$$\begin{aligned} y[n] + \gamma y[n-1] &= \beta u[n] \\ y[n] &= \beta - \gamma y[n-1] = \beta \left( 1 - \gamma + \gamma^2 + \dots + (-\gamma)^n \right) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> *Kanonický tvar* diferenční rovnice označuje ustálenou formu zápisu rovnice, kde výstupy jsou umístěny na levé straně a vstupy na pravé straně rovnice, seřazeny podle posunutí. Zápis v kanonickém tvaru umožňuje čtenáři snadnější orientaci v problematice.

Pokud si uvědomíme, jak vypadá vzorec pro částečný součet členů geometrické posloupnosti, lze z výše uvedeného výčtu odvodit, že řešení rovnice ceny by mělo být ve tvaru

$$y[n] = \beta \sum_{m=0}^n (-\gamma)^m = \beta \frac{1 - (-\gamma)^{n+1}}{1 + \gamma} = \frac{\beta}{1 + \gamma} + \frac{\beta\gamma}{1 + \gamma} (-\gamma)^n.$$

Výsledná cena tedy pro stabilní trh klesá k určité stabilní hodnotě, dané podílem  $\beta/(1 + \gamma)$ . Výsledný proces stabilizace ceny je znázorněn na obrázku 12.

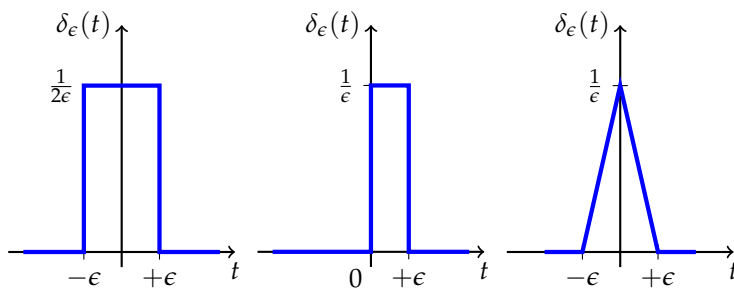
Doporučená literatura pro tuto část je [Oppenheim \(1997\)](#).

## Základní spojité signály

### ■ doplnit text ■

#### Diracův impuls

Tato funkce je definována na časovém intervalu pro všechna  $t$  a její nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu  $t = 0$ . Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé  $\epsilon > 0$ .



Obrázek 14: Konečná reprezentace  $\delta_\epsilon(t)$  pro  $\epsilon > 0$

Funkci  $\delta(t)$  definujeme jako  $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$ .

Funkce  $\delta(t)$  se nazývá **Diracův impuls**, Diracova  $\delta$ -funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota  $\delta(t)$  pro  $t \neq 0$  je  $\delta(t) = 0$ . Její hodnota v  $t = 0$  není definována jako funkce, používá se integrální definice

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1$$

pro každé  $\epsilon > 0$ .

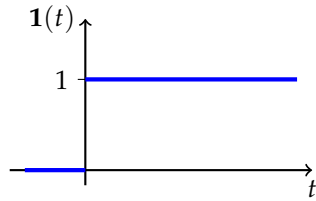
#### Jednotkový skok

Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena  $\mathbf{1}(t)$  a je definována jako

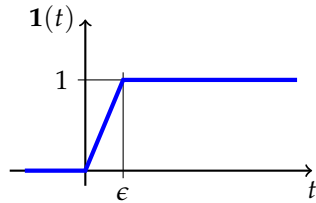
$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

Platí

$$\delta(t) = \frac{d}{dt} \mathbf{1}(t).$$



Obrázek 15: Jednotkový skok



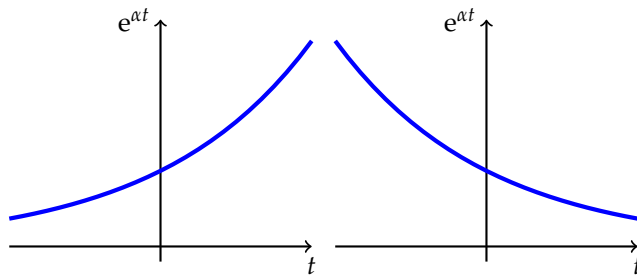
Obrázek 16: Jednotkový skok

### Exponenciála

Uvažujme exponenciální funkci

$$f(t) = e^{\alpha t},$$

kde  $\alpha$  je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.

Obrázek 17: Reálná exponenciála a) pro  $\alpha > 0$ , b) pro  $\alpha < 0$ .

### Exponenciální funkce

$$f(t) = A e^{\alpha t},$$

kde  $\alpha \in \mathbb{C}$ , je zajímavá hlavně v případě, kdy  $\alpha = i\omega$ ,

$$f(t) = A e^{i\omega t} = A (\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

### Periodické a harmonické funkce

O spojitém signálu  $f(t)$  říkáme, že je periodický s periodou  $T$ , jestliže

$$\forall t : f(t + T) = f(t)$$

a tedy také pro libovolné  $k \in \mathbb{Z}$

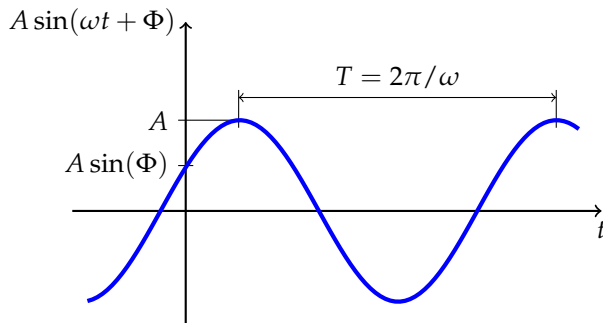
$$f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \dots = f(t + k \cdot T)$$

Nejmenší možné  $T$  nazýváme **fundamentální perioda**, značíme  $T_0$ .

Nejčastěji studovanými signály s periodickým průběhem jsou harmonické funkce, tedy funkce sinus a kosinus. Sinusový signál je obecně zapisován jako

$$f(t) = A \sin(\omega t + \Phi),$$

Konstanty  $A$ ,  $\omega$  a  $\Phi$  se nazývají **amplituda**, **úhlová frekvence** a



Obrázek 18: Sinusový signál

**fázový posun**. Sinusovka je periodická se základní periodou  $T = 2\pi/\omega$ .

### Základní diskretní signály

Jak diskretní signály vznikají?

**přirozeně** (průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů)

**vzorkováním spojitých signálů** (naměření teploty každou hodinu, měření průtoku každých 15 minut)

Diskretní signály, jimiž se budeme v předmětu zabývat, jsou diskretní v čase, ale *spojité ve funkční hodnotě*.

Digitální signál je totiž často **kvantovaný**, nabývá tedy v každém  $n$  pouze diskretní množiny funkčních hodnot, například  $\{0, 1, 2, \dots, 65535\}$ .

### Diskretní jednotkový impuls a skok

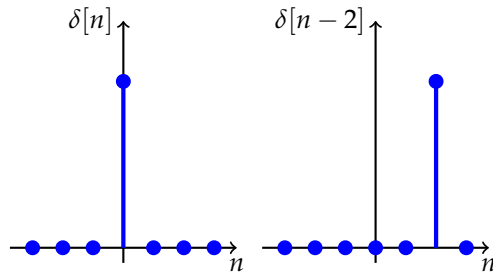
Diskretní jednotkový impuls  $\delta[n]$  je definován vztahem

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0. \end{cases}$$

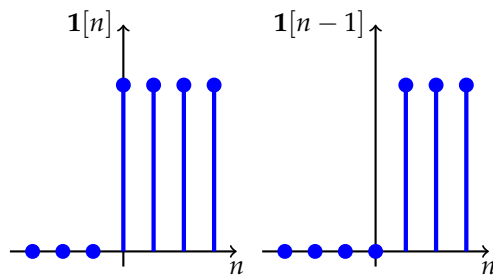
Diskretní jednotkový skok  $\mathbf{1}[n]$  je definován vztahem

$$\mathbf{1}[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0, \\ 0 & \text{pro } n < 0. \end{cases}$$





Obrázek 19: Diskrétní jednotkový impuls a posunutý jednotkový impuls.



Obrázek 20: Diskrétní jednotkový skok a posunutý jednotkový skok.

Z obrázku 20 snadno nahlédneme, že

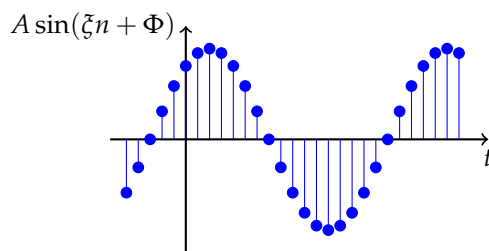
$$\mathbf{1}[n] = \sum_{m=0}^n n\delta[n-m] = \delta[n] + \delta[n-1] + \dots + \delta[1] + \delta[0].$$

### Diskrétní sinusová posloupnost

Mějme sinusový signál  $f(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$  s periodou  $T = 2\pi/\omega$ . Pokud tento signál vzorkujeme s periodou  $T_s > 0$ , získáme diskrétní sinusový signál

$$f[n] = f(nT) = A \sin(\omega nT_s + \Phi) = A \sin(\zeta n + \Phi),$$

kde  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  a  $\zeta = \omega T_s$ .



Obrázek 21: Diskrétní sinusová posloupnost

Diskrétní signál  $f[n]$  je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo  $N$  takové, že platí

$$f[n] = f[n+N] = f[n+2N] = \dots = f[n+k \cdot N] \quad (6)$$

pro všechna  $n \in \mathbb{Z}$  (z intervalu  $(-\infty, \infty)$ ) a pro libovolné  $k \in \mathbb{Z}$ .  $N$  se nazývá **perioda diskrétního signálu**.

Nejmenší možné  $N$  nazýváme **fundamentální perioda** a značíme  $N_0$ .

Diskrétní sinusový signál *nemusí být nutně periodický*, záleží na volbě vzorkovací periody  $T_s$ . Pro periodický diskrétní sinusový signál s periodou  $N$  musí platit

$$N = m \cdot \frac{2\pi}{T_s},$$

kde  $m \in \mathbb{N}$ . Máme i  $N \in \mathbb{N}$ , proto  $2\pi/T_s$  musí být racionální číslo.

*Příklad 5* (Neperiodický sinusový signál). Signál

$$y[n] = \sin n$$

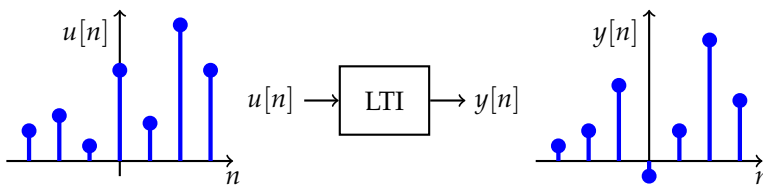
není pro  $T_s = 0.1$  s periodický, protože  $2\pi/T_s$  není racionální číslo.

### Odezva systému

■ **doplnit** ■

### Diskrétní systém

■ **doplnit** ■



Obrázek 22: Diskrétní LTI systém, jeho vstupní a výstupní posloupnost

**Definice 6** (Impulsní odezva). Odezvu systému na jednotkový impuls  $\delta[n]$  budeme nazývat **impulsní odezva** a značit  $h[n]$ ,

$$\begin{aligned} h[n] &= \mathcal{S}\{\delta[n]\} \\ h[n, m] &= \mathcal{S}\{\delta[n - m]\}. \end{aligned} \quad (7)$$

**Definice 7** (Přechodová odezva). Odezvu systému na jednotkový skok  $\mathbf{1}[n]$  budeme nazývat **přechodová odezva** a značit  $s[n]$ ,

$$s[n] = \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^n \delta[n - m]\right\}.$$

### Lineární a nelineární

Řekli jsme si, že systém není nic jiného, než černá skříňka, *black box*, kterou se pokoušíme nejprve identifikovat a poté reprodukovat. Při identifikaci se nejprve ptáme, zda se jedná o lineární systém. ■ **tohle taky nedává moc smysl** ■

**Definice 8** (Linearita). V matematice označujeme funkci  $f(x)$  jako lineární v případě, že je

- a) aditivní  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  a  
 b) homogenní,  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ .

Obdobně to platí i pro lineární systémy.

**Definice 9** (Lineární systém). Systém je lineární, pokud pro dva různé vstupní signály  $u_1[n]$  a  $u_2[n]$  platí

$$\begin{aligned}\mathcal{S}\{u_1[n] + u_2[n]\} &= \mathcal{S}\{u_1[n]\} + \mathcal{S}\{u_2[n]\}, \\ \mathcal{S}\{\alpha u[n]\} &= \alpha \mathcal{S}\{u[n]\}.\end{aligned}$$

Definice 9 nám trošku zakukleně popisuje jednu základní vlastnost všech lineárních systémů, ať už popisují svět v diskrétním či spojitém čase: Je-li vstupem systému vážený součet několika signálů, výstupem systému je opět stejně vážený součet neboli *superpozice* dílčích odezev na tyto vstupy. Jinak řečeno, odezva lineárního systému na lineární kombinaci elementárních vstupních signálů je lineární kombinace odezev na tyto vstupy.

**Definice 10** (Princip superpozice). Pro dva různé vstupní signály  $u_1[n]$  a  $u_2[n]$  platí

$$\begin{aligned}y_1[n] &= \mathcal{S}\{u_1[n]\} \\ y_2[n] &= \mathcal{S}\{u_2[n]\}\end{aligned}$$

a pro  $u[n] = \alpha u_1[n] + \beta u_2[n]$  také

$$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\{\alpha u_1[n] + \beta u_2[n]\}$$

Obecně platí

$$u[n] = \sum_i a_i u_i[n] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_i a_i y_i[n] = \sum_i a_i \mathcal{S}\{u_i[n]\}$$

**Příklad 11** (Lineární systém). Uvažujme systém

$$y[n] + a y[n-1] = u[n].$$

Je-li na vstupu lineární kombinace dvou různých signálů

$$u[n] = b_1 u_1[n] + b_2 u_2[n]$$

je na výstupu

$$y[n] = b_1 (y_1[n] + a y_1[n-1]) + b_2 (y_2[n] + a y_2[n-1])$$

kde

$$\begin{aligned}y_1[n] + a y_1[n-1] &= u_1[n] \\ y_2[n] + a y_2[n-1] &= u_2[n]\end{aligned}$$

**Příklad 12** (Nelineární systém). Numerický výpočet druhé odmocniny lze zapsat rekurentním vztahem

$$y[n+1] = \frac{1}{2} \left( y[n] + \frac{u[n]}{y[n]} \right).$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna  $\sqrt{10} = 3,16227766017$ . Pro  $u[n] = u[0] = 10$  dostáváme postupně

$n$	$y[n]$	$y^2[n]$
1	3	9
2	3,165	10,017225
3	3,162278	10,00000214928
4	3,162277660	9,999999999568
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Pro obecný vstupní signál  $u[n]$  je pak odezva lineárního systému

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] \delta[n-m]\right\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] h[n,m]. \end{aligned} \quad (8)$$

Vidíme, že chování systému je zcela určeno jeho odezvami na různě posunuté jednotkové pulsy  $h[n, m]$ .

Přechodová odezva diskrétního lineárního systému  $s[n]$  je dána prostým součtem impulsních odezev pro  $0 \leq m \leq n$

$$\begin{aligned} s[n] &= \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^n \delta[n-m]\right\} \\ &= \sum_{m=0}^n \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=0}^n h[n, m]. \end{aligned}$$

Lze za nějakých podmínek zjednodušit  $h[n, m]$ ?

*Časově invariantní, resp. stacionární systém*

Systém se nazývá **časově invariantní**, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí)  $n - m$  a nikoliv na každém časovém okamžiku  $n$  a  $m$  samostatně.

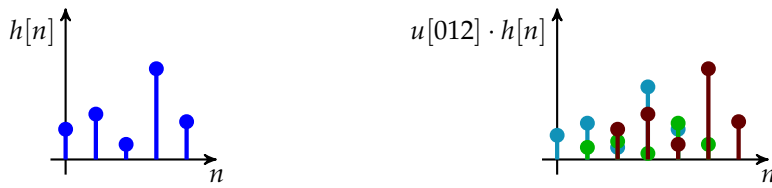
$$\begin{aligned} \text{dnes} \quad \dots & \quad y[n] = \mathcal{S}[u[n]] \\ \text{včera} \quad \dots & \quad y[n-1] = \mathcal{S}[u[n-1]] \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

Potom také rovnice (7) pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

$$h[n, m] \rightarrow h[n - m] = \mathcal{S}\{\delta[n - m]\}.$$

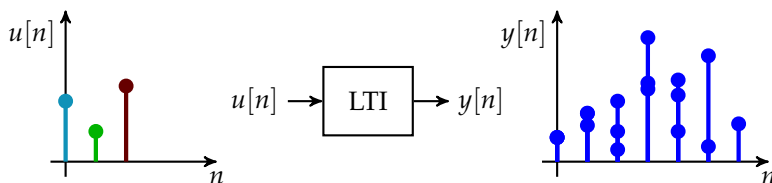
V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice (8) **konvoluční sumu**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n - m] \cdot u[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot u[n - k], \quad (9)$$



$$y[n] = u[0] \cdot h[n] + u[1] \cdot h[n-1] + u[2] \cdot h[n-2]$$

Obrázek 23: Superpozice odezvy  $y[n]$  jako  $\sum_{k=0}^{\infty} u[k]h[n-k]$



kterou pro úsporu místa značíme

$$y[n] = h[n] * u[n].$$

**Pozor: nejde o násobení!**

$$h[n] \neq \frac{y[n]}{u[n]}$$

**Příklad 13** (Časově invariantní systém). Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsany diferencní rovnicí

$$y[n] + a y[n-1] = u[n].$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj.  $a$  je konstantní a není funkcí  $n$ , zachovává tato rovnice tvar při záměně  $n \rightarrow n - m$ .

Impulsní odezva je potom

$$h[n] = (-a)^n \mathbf{1}[n].$$

**Příklad 14** (Časově proměnný systém). Uvažujme nyní obměněnou diferencní rovnicí

$$y[n] + n \cdot y[n-1] = u[n].$$

Koeficient u  $y[n-1]$  závisí na čase a tato rovnice nezachovává tvar při záměně  $n \rightarrow n - m$ . **■ ukázat, proč ■** Impulsní odezvu lze psát ve tvaru

$$h[n] = (-1)^n n! \mathbf{1}[n].$$

*Kauzální, příčinný systém*

Systém je **kauzální**, pokud jeho výstup závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupů.

Výstupní signál  $y[n]$  kauzálního systému tedy závisí pouze na  $\{u[n], u[n-1], u[n-2], \dots\}$ . V konvoluční sumě (9) proto

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] u[n-k] \\ &= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k] u[n-k]}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} h[k] u[n-k] \end{aligned}$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy  $h[n] = 0$  pro  $n < 0$ .

Pro kauzální systémy tedy platí, že jejich impulsní odezva musí být nulová před okamžikem vstupního impulsu, což odpovídá našemu intuitivnímu vnímání kauzality: napřed musí existovat příčina, až po ní můžeme pozorovat důsledky.

Pro lineární kauzální systémy přitom také platí, že pokud je jejich vstup až do nějakého okamžiku roven 0, i výstup bude až do toho okamžiku nulový.

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k] \cdot h[n-k].$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby  $\forall n < 0 : u[n] = 0, y[n] = 0$  (oba signály mohou mít nenulové členy pouze pro  $n \geq 0$ ), potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^n h[n-k] \cdot u[k].$$

### *Spojitéj systém*

**Definice 15** (Impulsní odezva). Odezvu systému na Diracův impuls  $\delta(t)$  budeme nazývat **impulsní odezva** a značit  $h(t)$ ,

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{S}\{\delta(t)\} \\ h(t, \tau) &= \mathcal{S}\{\delta(t - \tau)\}. \end{aligned}$$

**Definice 16** (Přechodová odezva). Odezvu systému na jednotkový skok  $\mathbf{1}(t)$  budeme nazývat **přechodová odezva** a značit  $s(t)$ ,

$$s(t) = \mathcal{S}\{\mathbf{1}(t)\} = \mathcal{S}\left\{\int_0^t \delta(t - \tau) dt\right\}.$$

V případě spojitého času postupujeme podobně a odvodíme pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau.$$

Operaci často zapisujeme ve zjednodušené formě jako

$$y(t) = h(t) * u(t).$$

Opět připomínáme, že se v tomto zápisu nejedná o násobení!

Obrázek 24: Animovaný obrázek výpočtu konvoluce dvou signálů. Funguje pouze v prostředí Adobe Reader, jinde uvidíte prázdko

Pro  $u(t) = \delta(t)$  platí pro lineární a časově invariantní systém samozřejmě

$$y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = h(t). \quad (10)$$

Výstupní signál  $y(t)$  spojitého kauzálního systému závisí pouze na hodnotách vstupů pro předešlé časové okamžiky. Z důvodu, které klademe na kauzální chování systému, přejde konvoluční integrál (10) na tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 h(\tau) u(t - \tau) d\tau}_0 + \int_0^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

a hodnoty impulsní odezvy pro  $t < 0$  uvažujeme opět  $h(t) = 0$ .

Konvoluční integrál pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau.$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby  $\forall t < 0 : u(t) = 0, y(t) = 0$  (oba signály mohou být nenulové členy pouze pro  $t \geq 0$ ), potom platí

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau.$$

### Autonomní a neautonomní systém

**Definice 17** (Autonomní systém). Za autonomní systém považujeme takový, který **nemá vstup**. Diskrétní autonomní systém je popisuje tedy například diferenční rovnice vnějšího popisu

$$y[n + 1] + a y[n] = 0.$$

Výstup autonomního systému je odezvou na počáteční podmínky.

V případě, že systém má vstup  $u[n]$ , tedy

$$y[n] + a y[n - 1] = u[n],$$

systém pokládáme za neautonomní.

### Stabilita

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

odezvy na vstupní signál

odezvy na počáteční podmínky

Impulsní odezvu spojitého LTI systému lze vždy zapsat jako součet exponencií ve tvaru

$$h(t) = \sum_{\mu=0}^n k_{\mu} e^{p_{\mu} t}.$$

kde  $p_{\mu}$  jsou tzv. *póly přenosové funkce* systému.

Pro  $p_{\mu} \in \mathbb{R}$  je  $h(t)$  reálná exponenciála, která pro  $t \rightarrow \infty$  buď roste nade všechny meze ( $p_{\mu} > 0$ ) nebo klesá k nule ( $p_{\mu} < 0$ ).

Pro  $p_{\mu} \in \mathbb{C}$  je  $h(t)$  komplexní exponenciála, která pro  $t \rightarrow \infty$  kmitá a buď roste nade všechny meze nebo klesá k nule, záleží na  $\Re p_{\mu}$ .

Impulsní odezvu LTI systému lze vždy zapsat jako součet exponencií ve tvaru

$$\mathcal{L}^{-1} \{H(p)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{\mu=0}^n \frac{k_{\mu}}{p - p_{\mu}} \right\} = \sum_{\mu=0}^n k_{\mu} e^{p_{\mu} t} = h(t).$$

V případě, kdy  $p_{\mu}$  je reálné číslo, je impulsní odezvou reálná exponenciála, která pro  $t \rightarrow \infty$  buď roste nade všechny meze (to v případě, že  $p_{\mu}$  je kladné), nebo klesá k nule (to v případě, že  $p_{\mu}$  je záporné). Bude-li  $p_{\mu}$  komplexní číslo,  $p_{\mu} = a + bi$ , je  $e^{p_{\mu} t} = e^{at} e^{ibt}$ .



Ryze komplexní exponenciála  $e^{ibt}$  je podle Eulerova vzorce kombinací harmonických průběhů, které jsou pro  $t \rightarrow \infty$  seshora i zespoda omezené, a rozhodující pro chování celé funkce je proto průběh  $e^{at}$ , jenž tyto harmonické moduluje. Bude-li v tomto případě  $a$  kladné, roste  $t \rightarrow \infty$  hodnota  $e^{at}$  nade všechny meze, je-li  $a$  záporné, klesá hodnota  $e^{at}$  k nule.

Z výše uvedené úvahy vyplývá, jak z polohy pólů přenosové funkce jednoduše odvodíme tvar impulsní odezvy a tedy stabilitu ( $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ ) respektive nestabilitu ( $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ ) systému:

Pro stabilní systém platí  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$ .

V impulsní odezvě se nachází minimálně jedna rostoucí exponenciála, jež bude hodnotě  $h(t)$  postupně dominovat, a je tedy  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ .

Systém může být ale nestabilní i v jiných případech, kdy také  $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$ .

### Reference

OPPENHEIM, Alan V., Alan S. WILLSKY a Syed Hamid NAWAB.  
*Signals and Systems*. 2. vyd. Upper Saddle River: Prentice Hall,  
 1997, 957 s. ISBN 01-381-4757-4.