

Úvodní informace

Matematické modelování

Matematické metody pro ITS (11MAMY)

Jan Příkryl, Bohumil Kovář

1. přednáška 11MAMY

středa 17. března 2021

verze: 2022-03-16 18:53

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

O předmětu

Základní organizační informace

Seznam literatury

Hodnocení předmětu

Vstupní znalosti

Výstupní znalosti

Přednášející:

- Dr. Ing. Jan Příkryl (prikryl@fd.cvut.cz)
přednášky nepravidelně blokově, út–čt 9:45–14:45

Cvičící:

- Dr. Ing. Jan Příkryl (prikryl@fd.cvut.cz)
Ing. Michal Matowicki (matowmic@fd.cvut.cz)
cvičení nepravidelně blokově, út–čt 9:45–14:45

Garant předmětu:

- Dr. Ing. Jan Příkryl (prikryl@fd.cvut.cz)

Domovská stránka předmětu 11MAMY:

<http://zolotarev.fd.cvut.cz/mamy/>

Cvičení: Pravidla jsou na stránkách předmětu.

Cvičení pro druhý zápis: Zatím naštěstí nemáme.

- a) VELTEN, Kai. *Mathematical modeling and simulation: introduction for scientists and engineers*. John Wiley & Sons, 2009.
- b) OGATA, Katsuhiko. *Modern control engineering*. Prentice Hall PTR, 2001.
- c) OPPENHEIM, Alan V., Alan S. WILLSKY a Syed Hamid NAWAB. *Signals and Systems*. 2. vyd. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997, 957 s. ISBN 01-381-4757-4.
- d) JAMES, Gareth, et al. *An introduction to statistical learning*. New York: Springer, 2013.
- e) DANGELMAYR, Gerhard a KIRBY, Michael. *Mathematical Modeling – A Comprehensive Introduction*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2005.

- f) HEATH, Michael T. *Scientific computing – An Introductory Survey*. 2. vyd. New York: McGraw-Hill, 2002.
- g) BERTSEKAS, Dimitri P. *Dynamic programming and optimal control*. Belmont, MA: Athena Scientific, 1995.
- h) KARBAN, Pavel. *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink*. Brno: Computer Press, 2006.
- i) Informace o prostředí MATLAB
<http://zolotarev.fd.cvut.cz/mni/>
<http://zolotarev.fd.cvut.cz/msp/>
<http://www.fd.cvut.cz/personal/nagyivan/PrpStat/Prp/MatIntro.pdf>
- j) Matematika-opakování: <http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml1/>

Celkový počet bodů, které lze získat, je 40. Počet bodů, které studenti mohou získat ze semestru, je 20. Zkouška sestává z písemného testu (20 bodů).

Zápočet udělujeme od 10 bodů ze semestru výše za předpokladu, že student uspěje v úvodním testu. Úvodní test lze jednou opakovat.

Body jsou rozděleny následovně:

- 10 bodů za implementaci jednoduchého modelu z oblasti ITS,
- 10 bodů ze semestru, z toho 4×2 za průběžné testy.

Semestrální projekt je skupinový – skupiny po maximálně třech studentech.

Toto jsou znalosti, u nichž předpokládáme, že je ovládáte. Jejich neznalost se **neomlouvá**.

- a) Znalost základních pojmů a operací s vektory a maticemi
- b) Znalost práce s komplexními čísly a základů funkcí komplexní proměnné
- c) Znalost vlastností trigonometrických, hyperbolických, exponenciálních funkcí
- d) Znalost výpočtu součtů nekonečné řady, derivace a integrálů funkce jedné proměnné
- e) Znalost práce se zlomky, algebraickými výrazy a běžné středoškolské matematiky
- f) Základní znalosti algoritmizace a prostředí SCILAB/MATLAB (v rozsahu 14ALG a 11STAT)

- a) Znalost základních principů matematického modelování a matematické teorie řízení
- b) Základní znalosti o typech modelů a jejich užití
- c) Základní znalosti o měření a předzpracování dat
- d) Znalost metod lineární a logistické regrese, výběru regresorů, regularizace
- e) Znalost základních přístupů ke klasifikaci a metod učení bez učitele
- f) Znalost prostředí MATLAB/SIMULINK pro modelování dynamických systémů a řešení diferenciálních rovnic
- g) Povědomí o jednokriteriální i vícekriteriální optimalizaci

Matematické modelování systémů

Modelování je umění kompromisu

Jaké cíle může modelování dosáhnout?

Klasifikace modelů

Fáze modelování

Model systému

Vnější popis systémů

Vnitřní popis systémů

Iterace diferenční rovnice

Úvod do teorie signálů

Modely popisují naše přesvědčení o tom, jak svět funguje.

Provázejí nás od nepaměti:

- obyčejná mapa je dvourozměrný model pohledu na krajinu,
- modely plánovaných budov ze sádry a dřeva.

Většinou jde o **zjednodušení reality**: postihují jen to, co nás pro studium daného problému opravdu zajímá. Pro nás nepodstatné detaily model zanedbává.

V matematickém modelování naše přesvědčení o fungování světa překládáme do jazyka matematiky.

Má to řadu výhod:

- a) Matematika je *velmi přesný jazyk*.
- b) Matematika je *výstižný jazyk s dobře definovanými pravidly* pro manipulaci s výrazy.
- c) Všechny dřívější výsledky *jsou nám k dispozici* a můžeme je pro náš model využít.
- d) K provedení numerických výpočtů *můžeme dnes použít počítače*.

Značnou část matematického modelování tvoří **kompromisy**.

Většina reálných systémů je příliš složitá.

Kompromis #1: Snaha **identifikovat nejdůležitější částí systému** – ty budou do modelu zahrnuty, zbytek bude zanedbán.

Matematickým aparátem lze v naprosté obecnosti modelovat mnoho, ale použitelnost modelu závisí kriticky na formě rovnic, použitých k popisu systému. K jejich vyčíslení používáme **počítače**, a ty **nejsou nikdy zcela přesné** a **mají omezený výpočetní výkon**.

Kompromis #2: Rovnice, popisující model, musí být v rozumném čase řešitelné – pro rychlé děje potřebujeme jednoduché modely.

- a) *Rozvoj vědeckého poznání* – prostřednictvím kvantitativního vyjádření současných znalostí o systému (stejně jako znázornit to, co víme, můžeme také ukázat, co nevíme);
- b) *Testování* vlivu změn v systému
- c) *Získat informace pro podporu rozhodování*, včetně
 - i. taktických rozhodnutí manažerů
 - ii. strategických rozhodnutí plánovačů

Deterministické × stochastické

Mechanistické × empirické

molekuly → buňky → orgány → jedinec → stádo

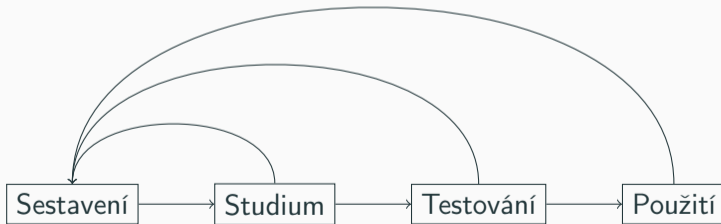


	Empirický	Mechanistický
Deterministický	Předpověď růstu dobytka z <i>regresní závislosti</i> na konzumaci potravy	Pohyb planet založený na Newtonské mechanice, popsán <i>diferenciálními rovnicemi</i>
Stochastický	<i>Analýza rozptylu</i> výnosů odrůd přes lokality a roky	Genetika malých populací založená na Mendelovské dědičnosti popsán <i>pravděpodobnostními rovnicemi</i>

Čtyři hlavní fáze.

Modelovací projekty nepostupují plynule od fáze tvorby modelu až po jeho použití.

Pokud dojde ke jakýmkoliv změnám modelu, pak se fáze studia a testování musí opakovat.



Definice (System)

Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

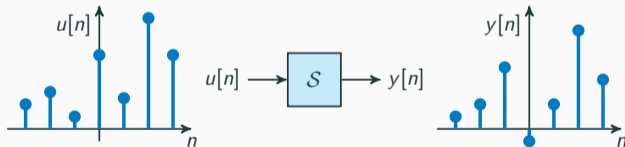
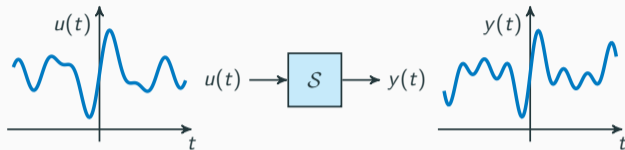
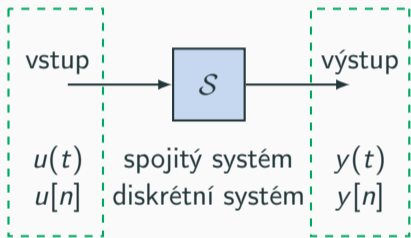
- systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,
- systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

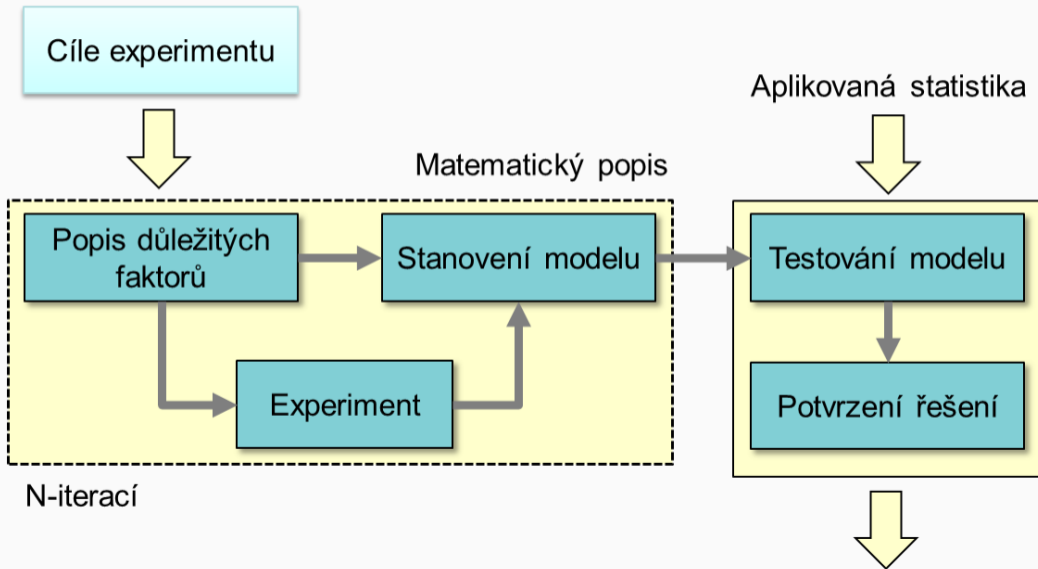
Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.

Model

Za model můžeme pokládat náhradu nebo zjednodušení **skutečného objektu reálného světa** z hlediska jeho vlastností a funkčnosti.

Modelování je možné pouze pokud zavedeme **určitý stupeň** abstrakce a aproximace.

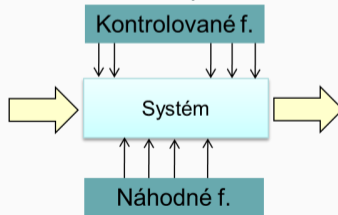
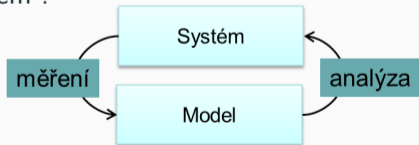


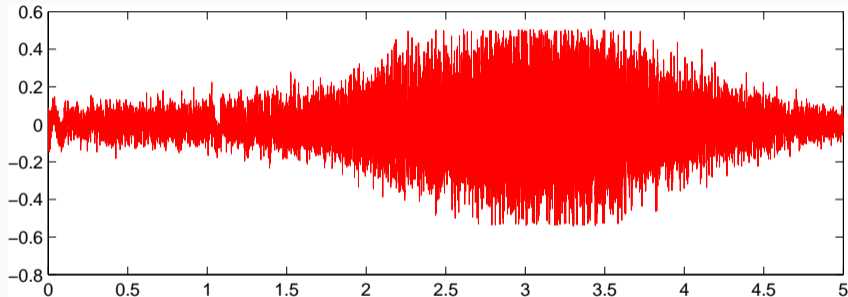


Při analýze navrženého modelu chceme učinit co možná nejsilnější rozhodnutí na základě malého množství dat. Správnost našeho návrhu je nutné statisticky vyhodnotit.

Problémy:

- Významné difference ve sledovaných parametrech mohou být způsobeny špatným návrhem modelu, případně měřením dat
- Je těžké rozlišit, zda difference v datech jsou skutečné nebo způsobené „náhodným vlivem“.





a teď jeho zvuk zvuk auta

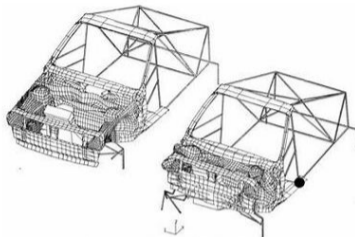
Otázky:

- Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- Jak ověříme pevnost nového mostu?
- Jak ověříme bezpečnost softwaru zabezpečovacího zařízení?
- Jak předpovíme dopravní zácpu na dálnici?
- Jak zajistíme spolehlivou funkci navigace při výpadku signálu GPS?

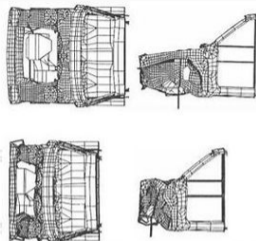
Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!



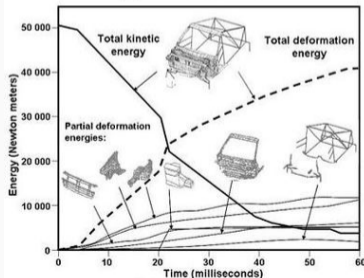




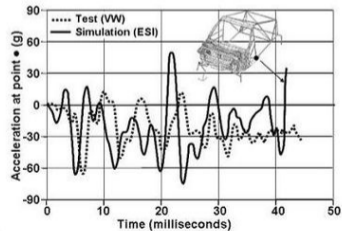
(a) crash simulation



(b) top and side views of simulation



(c) energy balance



(d) acceleration at point in cabin

Dynamický systém má v každém okamžiku **stav**, daný množinou reálných čísel. Tento stav lze reprezentovat jako bod ve stavovém prostoru (tedy jako **vektor**, často x).

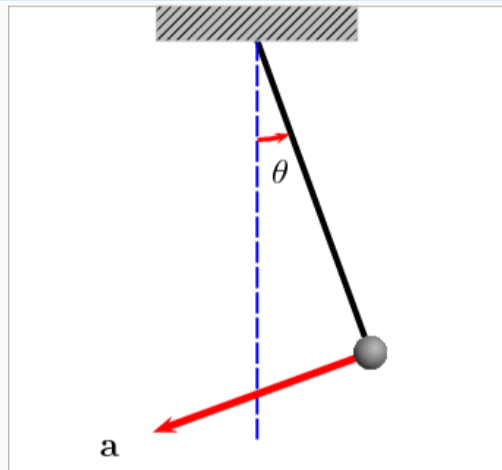
Evoluční pravidlo (rovnice vývoje stavu) popisuje přechody mezi jednotlivými stavy dynamického systému.

Toto pravidlo je

- většinou deterministické, ale
- může být stochastické.

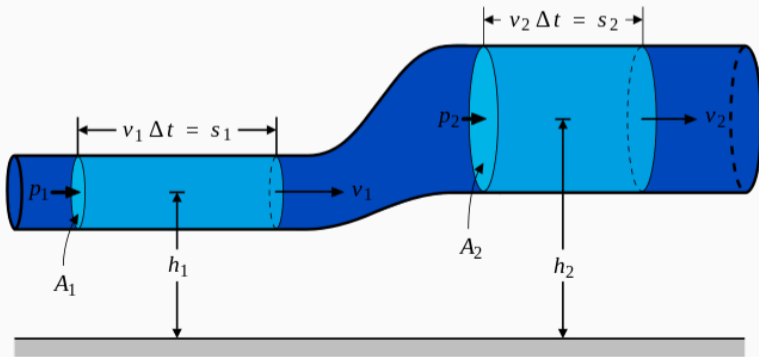
Pozor: V matematice a fyzice tak nazýváme **systémy citlivé na počáteční podmínky** (dvojitě kyvadlo, Lorenzův atraktor)

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{\nabla p}{\rho}$$

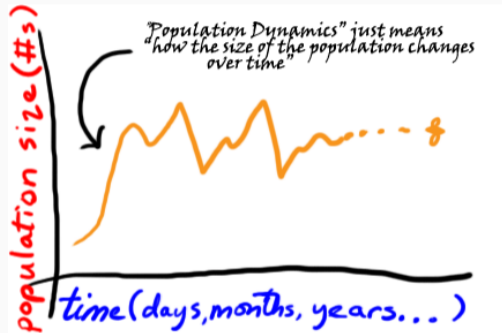


Exponenciální růst

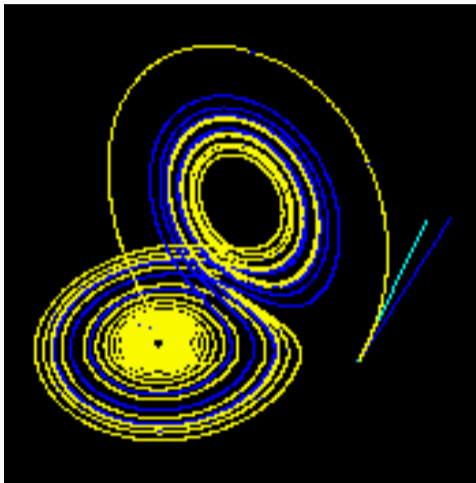
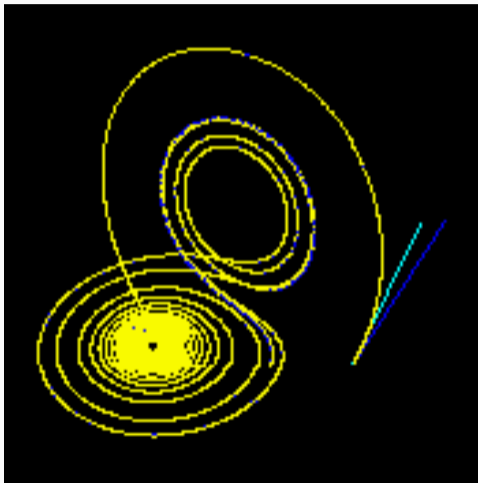
$$\dot{N} = rN$$

Logistický růst

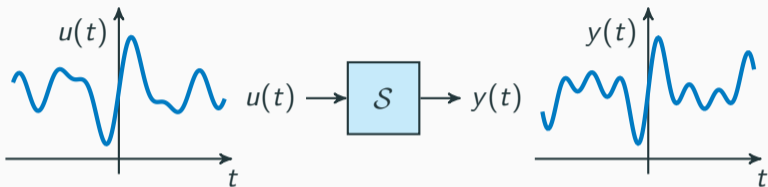
$$\dot{N} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right)$$







Vnější popis vychází z popisu systému vektorem **vstupu u** a vektorem **výstupu y** .

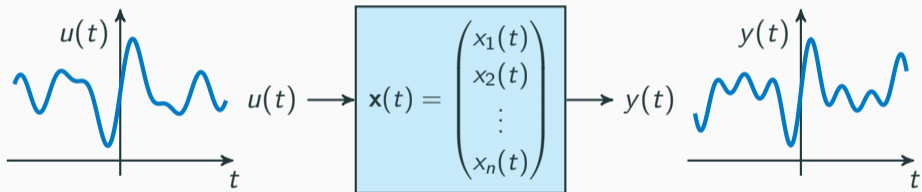


Stavový vektor systému x nepoužíváme: Systém chápeme jako **černou skříňku**, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat její reakci na vnější události (signály, data).

Vnější model popisujeme **diferenciální rovnicí** pro systémy se spojitým časem a **diferenční rovnicí** pro systémy s diskretním časem. Uvedená rovnice je obecně vyššího řádu, než 1.

Vnitřní, tzv. **stavový popis** systému používá k popisu dynamiky systému vektor **vnitřních stavů x** .

Vektor vstupů u a vektor výstupních veličin y jsou druhotné veličiny vnitřního popisu.



Stavové modely popisujeme

- soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a
- soustavou diferenčních rovnic prvního řádu pro systémy s diskretním časem.

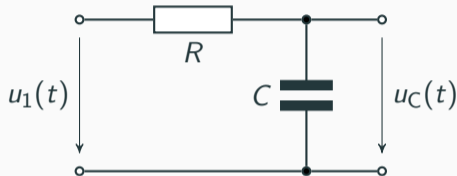
Modelování není samospasitelné:

- model je pouze přiblížením reality,
- výstupy modelu je proto vždy třeba ověřovat,
- možné chyby jsou jak v modelu, tak i v jeho výpočtu.

Rozlišujeme dva kroky ověření:

Verifikace: Počítáme správný model.

Validace: Model počítá správně.



Napětí $u_1(t)$ na RC článku je součet napětí na rezistoru $u_R(t)$ a na kapacitoru $u_C(t)$:

$$u_1(t) = u_R(t) + u_C(t).$$

Proud procházející obvodem $i(t)$ a časový průběh napětí na rezistoru $u_R(t)$ je možno vyjádřit jako

$$i(t) = C \frac{d}{dt} u_C(t)$$

a proto

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = RC \frac{d}{dt} u_C(t).$$

Dosazením $u_R(t)$ získáme diferenciální rovnici prvního řádu pro časový průběh napětí na kapacitoru $u_C(t)$:

$$RC \frac{d}{dt} u_C(t) + u_C(t) = u_1(t).$$

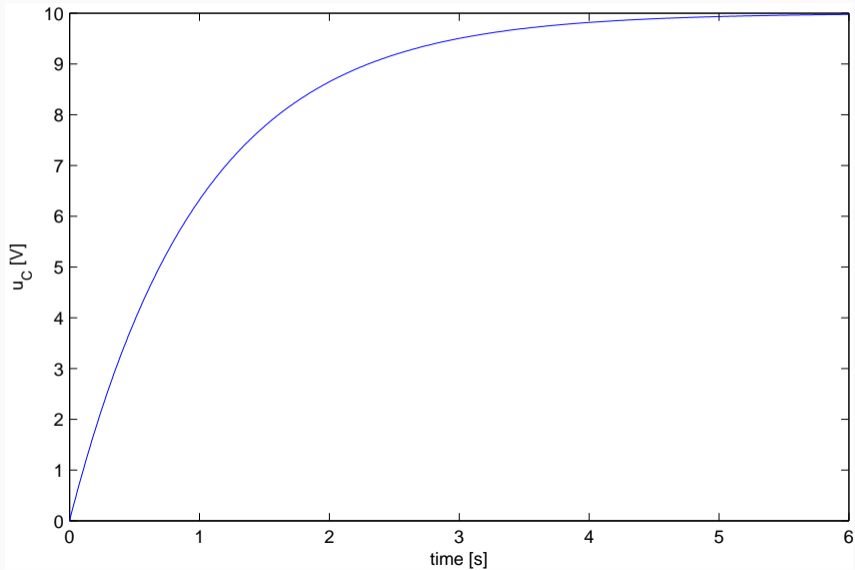
Řešení uvedené rovnice má pro všechna $t \geq 0$,

$$\alpha = \frac{1}{RC},$$

$$u_1(t) = U_0$$

a pro počáteční hodnotu $u_C(0) = 0$ tvar

$$u_C(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}).$$



Rovnice nabídky

Nabídka **dnes** závisí na **včerejší** ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n[k] = \mathcal{C}c[k - 1] + \mathcal{A}u[k].$$

Rovnice poptávky

Poptávka **dnes** závisí na **dnešní** ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

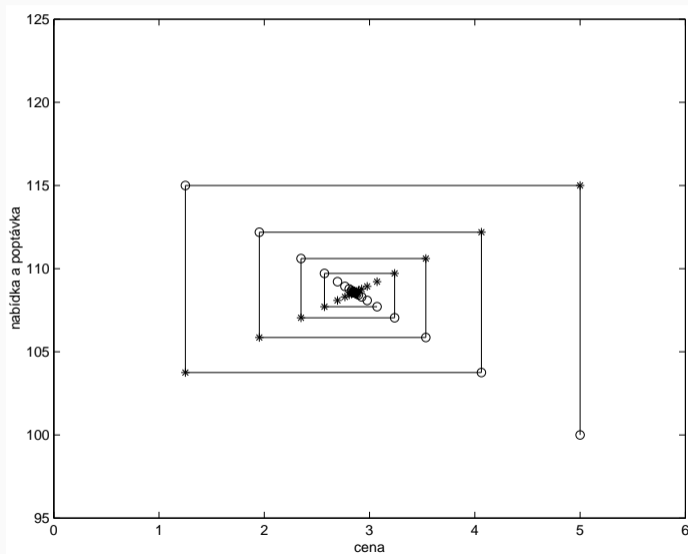
$$p[k] = -\mathcal{D}c[k] + \mathcal{B}u[k].$$

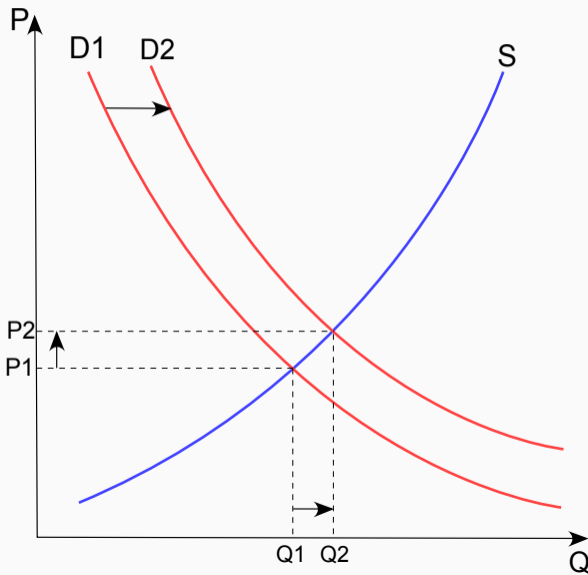
Rovnost nabídky a poptávky

$$n[k] = p[k]$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c[k] + \frac{C}{D}c[k-1] = \frac{B-A}{D}u[k].$$





Matematické modelování systémů

Iterace diferenční rovnice

Iterace rovnice ceny

Úvod do teorie signálů

Základní spojité signály

Základní diskrétní signály

Odezva systému

Iterací rozumíme obecně opakování nějakého postupu, v matematice například opakované vyhodnocení funkce. Výsledky z jedné iterace se použijí jako vstup pro další iterační krok.

Iteračně například

- hledáme nulové body funkce, $f(x^*) = 0$
- simulujeme vývoj **diskretizovaného** dynamického systému

Diferenční rovnici se vstupem $u[n]$ a výstupem $y[n]$ můžeme přepsat do tvaru

$$y[n + 1] = f(y[n], y[n - 1], \dots, u[n], u[n - 1], \dots)$$

stanovit tzv. **počáteční podmínky** dané řádem systému a potom například pro $n = 2, 3, \dots$ s počátečními podmínkami $y[0], y[1], y[2]$ iterativně počítat výstupy diskrétního systému $y[3], y[4], \dots$.

Podobný postup se používá pro **numerickou simulaci spojitého systému**. V tom případě se spojité funkce vyhodnocují v předem stanovených časových okamžicích, výsledek není tedy zcela přesný.

Diferenční rovnici

$$c[k] + \frac{C}{D}c[k-1] = \frac{B-A}{D}x[k],$$

odvozenou na předešlých slajdech přepíšeme do **kanonického tvaru**

$$y[k] + \gamma y[k-1] = \beta u[k]$$

a postupnými iteracemi nalezneme pro $u[k] = 1[k]$ a počáteční podmínku $y[-1] = 0$:

Pro $k = 0$:

$$y[0] + \gamma y[-1] = \beta u[0]$$

$$y[0] = \beta - \gamma y[-1] = \beta$$

Pro $k = 1$:

$$y[1] + \gamma y[0] = \beta u[1]$$

$$y[1] = \beta - \gamma y[0] = \beta - \beta\gamma$$

Pro $k = 2$:

$$y[2] + \gamma y[1] = \beta u[2]$$

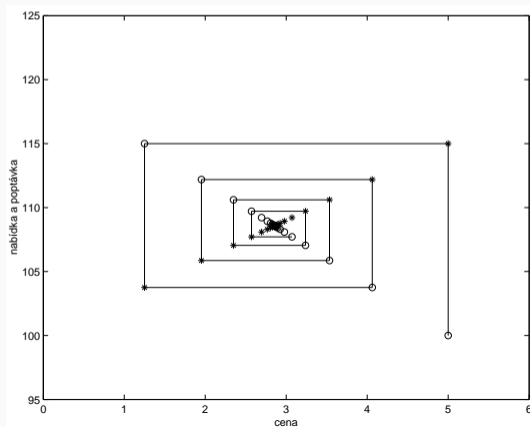
$$y[2] = \beta - \gamma y[1] = \beta - \beta\gamma + \beta\gamma^2$$

Pro obecné n :

$$y[n] + \gamma y[n-1] = \beta u[n]$$

$$y[n] = \beta - \gamma y[n-1] = \beta (1 - \gamma + \gamma^2 + \dots + (-\gamma)^n)$$

$$y[n] = \beta \sum_{m=0}^n (-\gamma)^m = \beta \frac{1 - (-\gamma)^{n+1}}{1 + \gamma} = \frac{\beta}{1 + \gamma} + \frac{\beta\gamma}{1 + \gamma} (-\gamma)^n$$



Matematické modelování systémů

Iterace diferenční rovnice

Úvod do teorie signálů

Základní spojité signály

Základní diskrétní signály

Odezva systému

Matematické modelování systémů

Iterace diferenční rovnice

Úvod do teorie signálů

Základní spojité signály

Základní spojité signály

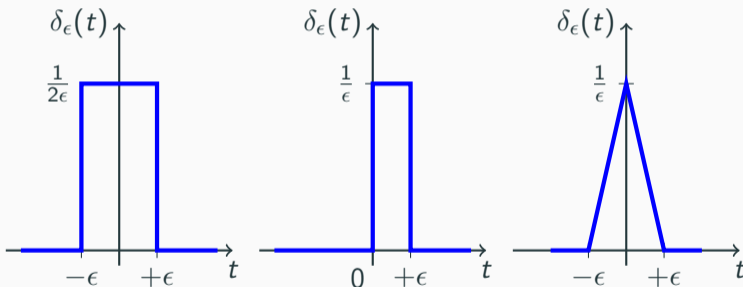
Diracův impuls

Jednotkový skok

Exponenciála

Periodické a harmonické funkce

Tato funkce je definována na časovém intervalu pro všechna t a její nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu $t = 0$. Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé $\epsilon > 0$.



Funkci $\delta(t)$ definujeme jako $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$.

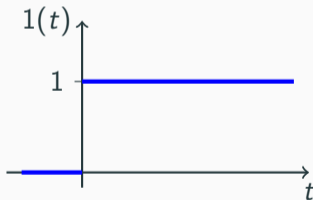
Funkce $\delta(t)$ se nazývá **Diracův impuls**, Diracova δ -funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota $\delta(t)$ pro $t \neq 0$ je $\delta(t) = 0$. Její hodnota v $t = 0$ není definována jako funkce, používá se integrální definice

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1$$

pro každé $\epsilon > 0$.

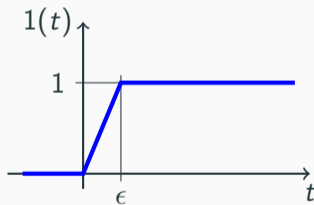
Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena $1(t)$ a je definována jako

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$



Platí

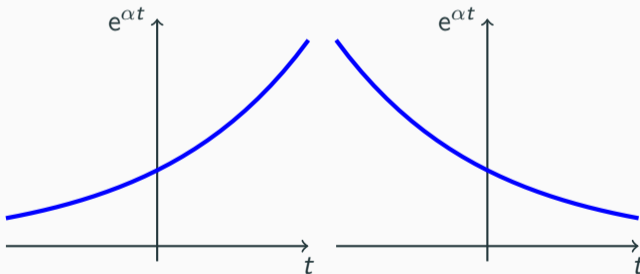
$$\delta(t) = \frac{d}{dt} 1(t).$$



Uvažujme exponenciální funkci

$$f(t) = e^{\alpha t},$$

kde α je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.



Exponenciální funkce

$$f(t) = Ae^{\alpha t},$$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$, je zajímavá hlavně v případě, kdy $\alpha = i\omega$,

$$f(t) = Ae^{i\omega t} = A(\cos \omega t + i \sin \omega t).$$

O spojitém signálu $f(t)$ říkáme, že je periodický s periodou T , jestliže

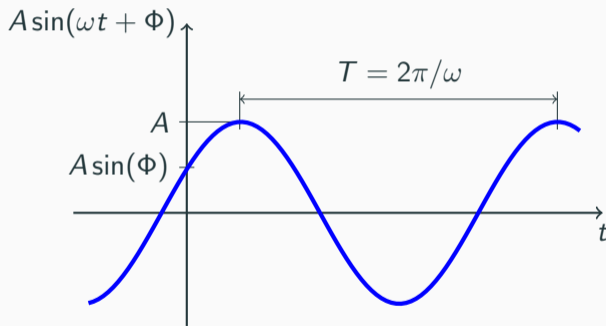
$$\forall t : f(t + T) = f(t)$$

a tedy také pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$

$$f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \dots = f(t + k \cdot T)$$

Nejmenší možné T nazýváme **fundamentální perioda**, značíme T_0 .

$$f(t) = A \sin(\omega t + \Phi),$$



Konstanty A , ω a Φ se nazývají **amplituda**, **úhlová frekvence** a **fázový posun**.

Sinusovka je periodická se základní periodou $T = 2\pi/\omega$.

Matematické modelování systémů

Iterace diferenční rovnice

Úvod do teorie signálů

Základní spojité signály

Základní diskrétní signály

Diskrétní jednotkový impuls a skok

Diskrétní sinusová posloupnost

Odezva systému

Jak diskretní signály vznikají?

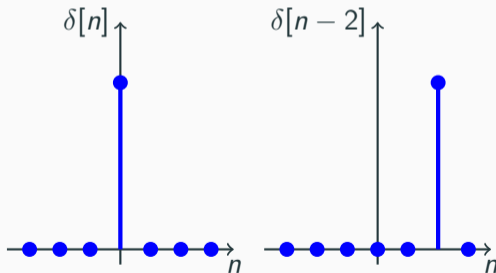
- **přirozeně** (průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů)
- **vzorkováním spojitých signálů** (naměření teploty každou hodinu, měřením průtoku každých 15 minut)

Diskretní signály, jimiž se budeme v předmětu zabývat, jsou diskretní v čase, ale **spojité ve funkční hodnotě**.

Digitální signál je totiž často **kvantovaný**, nabývá tedy v každém n pouze diskretní množiny funkčních hodnot, například $\{0, 1, 2, \dots, 65535\}$.

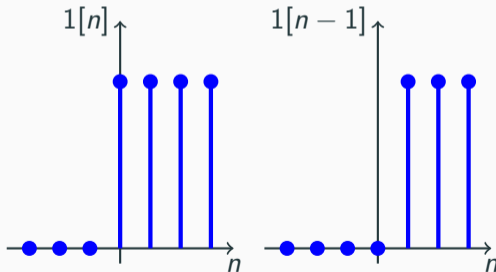
Diskrétní jednotkový impuls $\delta[n]$ je definován vztahem

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0. \end{cases}$$



Diskrétní jednotkový skok $1[n]$ je definován vztahem

$$1[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0, \\ 0 & \text{pro } n < 0. \end{cases}$$

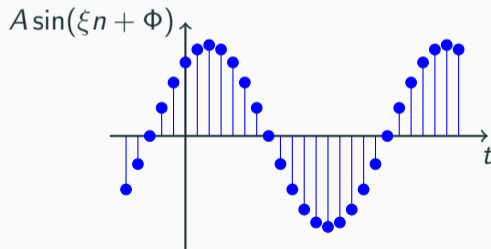


Mějme sinusový signál $f(t) = A \sin(\omega t + \Phi)$ s periodou $T = 2\pi/\omega$.

Pokud tento signál vzorkujeme s periodou $T_s > 0$, získáme diskrétní sinusový signál

$$f[n] = f(nT) = A \sin(\omega n T_s + \Phi) = A \sin(\xi n + \Phi),$$

kde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ a $\xi = \omega T_s$.



Diskrétní signál $f[n]$ je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo N takové, že platí

$$f[n] = f[n + N] = f[n + 2N] = \dots = f[n + k \cdot N]$$

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ (z intervalu $(-\infty, \infty)$) a pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. N se nazývá **perioda diskrétního signálu**.

Nejmenší možné N nazýváme **fundamentální perioda** a značíme N_0 .

Diskrétní sinusový signál **nemusí být nutně periodický**, záleží na volbě vzorkovací periody T_s . Pro periodický diskretní sinusový signál s periodou N musí platit

$$N = m \cdot \frac{2\pi}{T_s},$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Máme i $N \in \mathbb{N}$, proto $2\pi/T_s$ musí být racionální číslo.

Příklad (Neperiodický sinusový signál)

Signál

$$y[n] = \sin n$$

není pro $T_s = 0.1$ s periodický, protože $2\pi/T_s$ není racionální číslo.

Matematické modelování systémů

Iterace diferenční rovnice

Úvod do teorie signálů

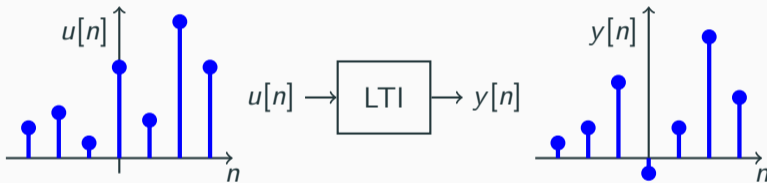
Základní spojité signály

Základní diskrétní signály

Odezva systému

Diskrétní systém

Lineární a nelineární



Definice (Impulsní odezva)

Odezvu systému na jednotkový impuls $\delta[n]$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h[n]$,

$$\begin{aligned}h[n] &= \mathcal{S}\{\delta[n]\} \\h[n, m] &= \mathcal{S}\{\delta[n - m]\} .\end{aligned}\tag{1}$$

Definice (Přechodová odezva)

Odezvu systému na jednotkový skok $1[n]$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s[n]$,

$$s[n] = \mathcal{S}\{1[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^n \delta[n-m]\right\}.$$

Definice (Linearita)

V matematice označujeme funkci $f(x)$ jako lineární v případě, že je

- a) aditivní $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ a
- b) homogenní, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Obdobně to platí i pro lineární systémy.

Definice (Lineární systém)

Systém je lineární, pokud pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$\mathcal{S}\{u_1[n] + u_2[n]\} = \mathcal{S}\{u_1[n]\} + \mathcal{S}\{u_2[n]\},$$

$$\mathcal{S}\{\alpha u[n]\} = \alpha \mathcal{S}\{u[n]\}.$$

Definice (Princip superpozice)

Pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$y_1[n] = \mathcal{S}\{u_1[n]\}$$

$$y_2[n] = \mathcal{S}\{u_2[n]\}$$

a pro $u[n] = \alpha u_1[n] + \beta u_2[n]$ také

$$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\{\alpha u_1[n] + \beta u_2[n]\}$$

Obecně platí

$$u[n] = \sum_i a_i u_i[n] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_i a_i y_i[n] = \sum_i a_i \mathcal{S}\{u_i[n]\}$$

Příklad (Lineární systém)

Uvažujme systém

$$y[n] + a y[n - 1] = u[n].$$

Je-li na vstupu lineární kombinace dvou různých signálů

$$u[n] = b_1 u_1[n] + b_2 u_2[n]$$

je na výstupu

$$y[n] = b_1 (y_1[n] + a y_1[n - 1]) + b_2 (y_2[n] + a y_2[n - 1])$$

kde

$$y_1[n] + a y_1[n - 1] = u_1[n]$$

$$y_2[n] + a y_2[n - 1] = u_2[n]$$

Příklad (Nelineární systém)

Numerický výpočet druhé odmocniny lze zapsat rekurentním vztahem

$$y[n+1] = \frac{1}{2} \left(y[n] + \frac{u[n]}{y[n]} \right).$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna $\sqrt{10} = 3,16227766017$. Pro $u[n] = u[0] = 10$ dostáváme postupně

n	$y[n]$	$y^2[n]$
1	3	9
2	3,165	10,017225
3	3,162278	10,00000214928
4	3,162277660	9,999999999568
\vdots	\vdots	\vdots

Pro obecný vstupní signál $u[n]$ je pak odezva lineárního systému

$$\begin{aligned}y[n] &= \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] \delta[n-m]\right\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m] h[n, m].\end{aligned}$$

Vidíme, že chování systému je zcela určeno jeho odezvami na různě posunuté jednotkové pulsy $h[n, m]$.

Přechodová odezva diskrétního lineárního systému $s[n]$ je dána prostým součtem impulsních odezev pro $0 \leq m \leq n$

$$\begin{aligned} s[n] &= \mathcal{S}\{1[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^n \delta[n-m]\right\} \\ &= \sum_{m=0}^n \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=0}^n h[n, m]. \end{aligned}$$

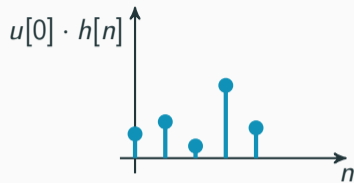
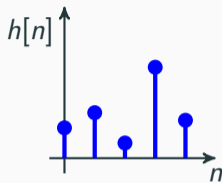
Lze za nějakých podmínek zjednodušit $h[n, m]$?

Systém se nazývá **časově invariantní**, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n - m$ a nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

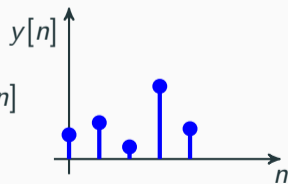
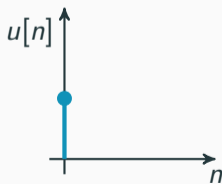
$$\begin{array}{ll} \text{dnes} & \dots & y[n] = \mathcal{S}[u[n]] \\ \text{včera} & \dots & y[n-1] = \mathcal{S}[u[n-1]] \\ & & \vdots \end{array}$$

Potom také rovnice pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

$$h[n, m] \rightarrow h[n - m] = \mathcal{S}\{\delta[n - m]\}.$$



$$y[n] = u[0] \cdot h[n]$$



V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice **konvoluční sumu**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m] \cdot u[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k],$$

kterou pro úsporu místa značíme

$$y[n] = h[n] * u[n].$$

Pozor: nejde o násobení!

$$h[n] \neq \frac{y[n]}{u[n]}$$

Příklad (Časově invariantní systém)

Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsany diferencní rovnicí

$$y[n] + a y[n - 1] = u[n].$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj. a je konstantní a není funkcí n , zachovává tato rovnice tvar při záměně $n \rightarrow n - m$. Impulsní odezva je potom

$$h[n] = (-a)^n 1[n].$$

Příklad (Časově proměnný systém)

Uvažujme nyní obměněnou diferenční rovnici

$$y[n] + n \cdot y[n - 1] = u[n].$$

Koeficient u $y[n - 1]$ závisí na čase a tato rovnice nezachovává tvar při záměně $n \rightarrow n - m$. Impulsní odezvu lze psát ve tvaru

$$h[n] = (-1)^n n! 1[n].$$

Systém je **kauzální**, pokud jeho výstup závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupů.

Výstupní signál $y[n]$ kauzálního systému tedy závisí pouze na $\{u[n], u[n-1], u[n-2], \dots\}$. V konvoluční sumě proto

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] u[n-k] \\ &= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k] u[n-k]}_0 + \sum_{k=0}^{\infty} h[k] u[n-k] \end{aligned}$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy $h[n] = 0$ pro $n < 0$.

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k] \cdot h[n-k].$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall n < 0 : u[n] = 0, y[n] = 0$ (oba signály mohou mít nenulové členy pouze pro $n \geq 0$), potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^n h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^n h[n-k] \cdot u[k].$$

Definice (Impulsní odezva)

Odezvu systému na Diracův impuls $\delta(t)$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h(t)$,

$$h(t) = \mathcal{S}\{\delta(t)\}$$
$$h(t, \tau) = \mathcal{S}\{\delta(t - \tau)\}.$$

Definice (Přechodová odezva)

Odezvu systému na jednotkový skok $1(t)$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s(t)$,

$$s(t) = \mathcal{S}\{1(t)\} = \mathcal{S}\left\{\int_0^t \delta(t - \tau) dt\right\}.$$

V případě spojitého času postupujeme podobně a odvodíme pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \cdot u(\tau) d\tau.$$

Operaci často zapisujeme ve zjednodušené formě jako

$$y(t) = h(t) * u(t).$$

Opět připomínáme, že se v tomto zápisu nejedná o násobení!



Pro $u(t) = \delta(t)$ platí pro lineární a časové invariantní systém samozřejmě

$$y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \delta(t - \tau) d\tau = h(t).$$

Výstupní signál $y(t)$ spojitého kauzálního systému závisí pouze na hodnotách vstupů pro předešlé časové okamžiky. Z důvodu, které klademe na kauzální chování systému, přejde konvoluční integrál na tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^0 h(\tau) u(t - \tau) d\tau}_0 + \int_0^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

a hodnoty impulsní odezvy pro $t < 0$ uvažujeme opět $h(t) = 0$.

Konvoluční integrál pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau.$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall t < 0 : u(t) = 0, y(t) = 0$ (oba signály mohou být nenulové členy pouze pro $t \geq 0$), potom platí

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) \cdot u(t - \tau) d\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau.$$

Definice (Autonomní systém)

Za autonomní systém považujeme takový, který **nemá vstup**. Diskrétní autonomní systém je popisuje tedy například diferenční rovnice vnějšího popisu

$$y[n + 1] + a y[n] = 0.$$

Výstup autonomního systému je odezvou na počáteční podmínky.

V případě, že systém má vstup $u[n]$, tedy

$$y[n] + a y[n - 1] = u[n],$$

systém pokládáme za neautonomní.

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

Impulsní odezvu spojitého LTI systému lze vždy zapsat jako součet exponenciál ve tvaru

$$h(t) = \sum_{\mu=0}^n k_{\mu} e^{p_{\mu} t}.$$

kde p_{μ} jsou tzv. **póly přenosové funkce** systému.

Pro $p_{\mu} \in \mathbb{R}$ je $h(t)$ reálná exponenciála, která pro $t \rightarrow \infty$ buď roste nade všechny meze ($p_{\mu} > 0$) nebo klesá k nule ($p_{\mu} < 0$).

Pro $p_{\mu} \in \mathbb{C}$ je $h(t)$ komplexní exponenciála, která pro $t \rightarrow \infty$ kmitá a buď roste nade všechny meze nebo klesá k nule, záleží na $\Re p_{\mu}$.

Z výše uvedené úvahy vyplývá, jak z polohy pólů přenosové funkce jednoduše odvodíme tvar impulsní odezvy a tedy stabilitu ($\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$) respektive nestabilitu ($\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$) systému:

- Pro stabilní systém platí $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$.
- V impulsní odezvě se nachází minimálně jedna rostoucí exponenciála, jež bude hodnotě $h(t)$ postupně dominovat, a je tedy $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$.
- Systém může být ale nestabilní i v jiných případech, kdy také $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \infty$.