Úvodní informace
Matematické modelování

Matematické metody pro ITS (11MAMY)

Jan Přikryl, Bohumil Kovář

1. přednáška 11MAMY

úterý 20. února 2023

verze: 2023-02-21 23:09

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

Obsah přednášky

Základní informace

Přednášející:

- Dr. Ing. Jan Přikryl (prikryl@fd.cvut.cz)
  přednášky nepravidelně blokově B302/K404, út–čt 9:45–14:45

Cvičící:

- Dr. Ing. Jan Přikryl (prikryl@fd.cvut.cz)
  Ing. Michal Matowicki (matowmic@fd.cvut.cz)
  cvičení nepravidelně blokově B116/K107c, út–čt 9:45–14:45

Garant předmětu:

- Dr. Ing. Jan Přikryl (prikryl@fd.cvut.cz)

Základní informace – Pokračování

Domovská stránka předmětu 11MAMY:
`http://zolotarev.fd.cvut.cz/mamy/`

Cvičení: Pravidla jsou na stránkách předmětu.

Cvičení pro druhý zápis: Zatím naštěstí nemáme.

Literatura (1/2)

a) VELTEN, Kai. *Mathematical modeling and simulation: introduction for scientists and engineers*. John Wiley & Sons, 2009.

b) OGATA, Katsuhiko. *Modern control engineering*. Prentice Hall PTR, 2001.

c) OPPENHEIM, Alan V., Alan S. WILLSKY a Syed Hamid NAWAB. *Signals and Systems*. 2. vyd. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997, 957 s. ISBN 01-381-4757-4.

d) JAMES, Gareth, et al. *An introduction to statistical learning*. New York: Springer, 2013.

e) DANGELMAYR, Gerhard a KIRBY, Michael. *Mathematical Modeling – A Comprehensive Introduction*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2005.

Literatura (2/2)

f) HEATH, Michael T. *Scientific computing – An Introductory Survey*. 2. vyd. New York: McGraw-Hill, 2002.

g) BERTSEKAS, Dimitri P. *Dynamic programming and optimal control*. Belmont, MA: Athena Scientific, 1995.

h) KARBAN, Pavel. *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink*. Brno: Computer Press, 2006.

i) Informace o prostředí MATLAB
`http://zolotarev.fd.cvut.cz/mni/`
`http://zolotarev.fd.cvut.cz/msp/`
`http://www.fd.cvut.cz/personal/nagyivan/PrpStat/Prp/MatIntro.pdf`

j) Matematika-opakování: `http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml1/`

Zápočet a zkouška

Celkový počet bodů, které lze získat, je 40. Počet bodů, které studenti mohou získat ze semestru, je 20. Zkouška sestává z písemného testu (20 bodů).

Zápočet udělujeme od 10 bodů ze semestru výše za předpokladu, že student uspěje v úvodním testu. Úvodní test lze jednou opakovat.

Body jsou rozděleny následovně:

- 10 bodů za implementaci jednoduchého modelu z oblasti ITS,
- 10 bodů ze semestru, z toho 4×2 za průběžné testy.

Semestrální projekt je skupinový – skupiny po maximálně třech studentech.

Toto jsou znalosti, u nichž předpokládáme, že je ovládáte. Jejich neznalost se **neomlouvá**.

a) Znalost základních pojmů a operací s vektory a maticemi
b) Znalost práce s komplexními čísly a základů funkcí komplexní proměnné
c) Znalost vlastností trigonometrických, hyperbolických, exponenciálních funkcí
d) Znalost výpočtu součtů nekonečné řady, derivace a integrálů funkce jedné proměnné
e) Znalost práce se zlomky, algebraickými výrazy a běžné středoškolské matematiky
f) Základní znalosti algoritmizace a prostředí SCILAB/MATLAB (v rozsahu 14ALG a 11STAT)

Znalosti výstupní

a) Znalost základních principů matematického modelování a matematické teorie řízení
b) Základní znalosti o typech modelů a jejich užití
c) Základní znalosti o měření a předzpracování dat
d) Znalost metod lineární a logistické regrese, výběru regresorů, regularizace
e) Znalost základních přístupů ke klasifikaci a metod učení bez učitele
f) Znalost prostředí MATLAB/SIMULINK pro modelování dynamických systémů a řešení diferenciálních rovnic
g) Povědomí o jednokriteriální i vícekriteriální optimalizaci

Obsah přednášky

Modely popisují naše přesvědčení o tom, jak svět funguje.

Provázejí nás od nepaměti:

- obyčejná mapa je dvourozměrný model pohledu na krajinu,
- modely plánovaných budov ze sádry a dřeva.

Většinou jde o zjednodušení reality: postihují jen to, co nás pro studium daného problému opravdu zajímá. Pro nás nepodstatné detaily model zanedbává.

V matematickém modelování naše přesvědčení o fungování světa překládáme do jazyka matematiky.

Má to řadu výhod:

a) Matematika je *velmi přesný jazyk.*
b) Matematika je *výstižný jazyk s dobře definovanými pravidly* pro manipulaci s výrazy.
c) Všechny dřívější výsledky *jsou nám k dispozici* a můžeme je pro náš model využít.
d) K provedení numerických výpočtů *můžeme dnes použít počítače*.

Značnou část matematického modelování tvoří kompromisy.

Většina reálných systémů je příliš složitá.

Kompromis #1: Snaha identifikovat nejdůležitější části systému – ty budou do modelu zahrnuty, zbytek bude zanedbán.

Matematickým aparátem lze v naprosté obecnosti modelovat mnoho, ale použitelnost modelu závisí kriticky na formě rovnic, použitých k popisu systému. K jejich vyčíslení používáme počítače, a ty nejsou nikdy zcela přesné a mají omezený výpočetní výkon.

Kompromis #2: Rovnice, popisující model, musí být v rozumném čase řešitelné – pro rychlé děje potřebujeme jednoduché modely.

a) *Rozvoj vědeckého poznání* – prostřednictvím kvantitativního vyjádření současných znalostí o systému (stejně jako znázornit to, co víme, můžeme také ukázat, co nevíme);
b) *Testování* vlivu změn v systému
c) Získat *informace pro podporu rozhodování*, včetně
   i. taktických rozhodnutí manažerů
   ii. strategických rozhodnutí plánovačů

Modely

Deterministické $\times$ stochastické

Mechanistické $\times$ empirické

molekuly $\longrightarrow$ buňky $\longrightarrow$ orgány $\longrightarrow$ jedinec $\longrightarrow$ stádo

$\boxed{\text{Nízká}} \longrightarrow \boxed{\text{Vysoká}}$

Klasifikace modelů

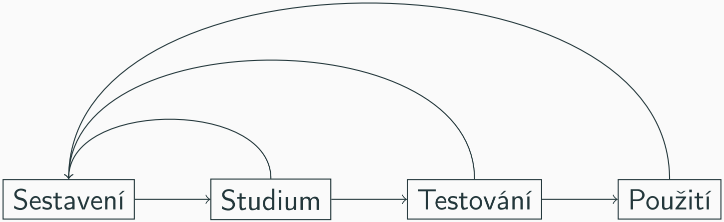
	Empirický	Mechanistický
Deterministický	Předpověď růstu dobytka z *regresní závislosti* na konzumaci potravy	Pohyb planet založený na Newtonovské mechanice, popsané *diferenciálními rovnicemi*
Stochastický	*Analýza rozptylu* výnosů odrůd přes lokality a roky	Genetika malých populací založená na Mendelovské dědičnosti popsané *pravděpodobnostními rovnicemi*

Fáze modelování

Čtyři hlavní fáze.

Modelovací projekty nepostupují plynule od fáze tvorby modelu až po jeho použití.

Pokud dojde ke jakýmkoliv změnám modelu, pak se fáze studia a testování musí opakovat.



Definice (Systém)

Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

- systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,
- systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.

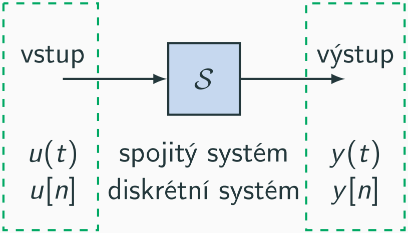
Co je modelování?

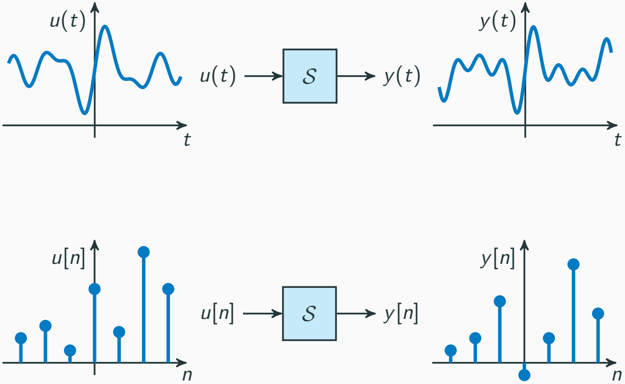
Model

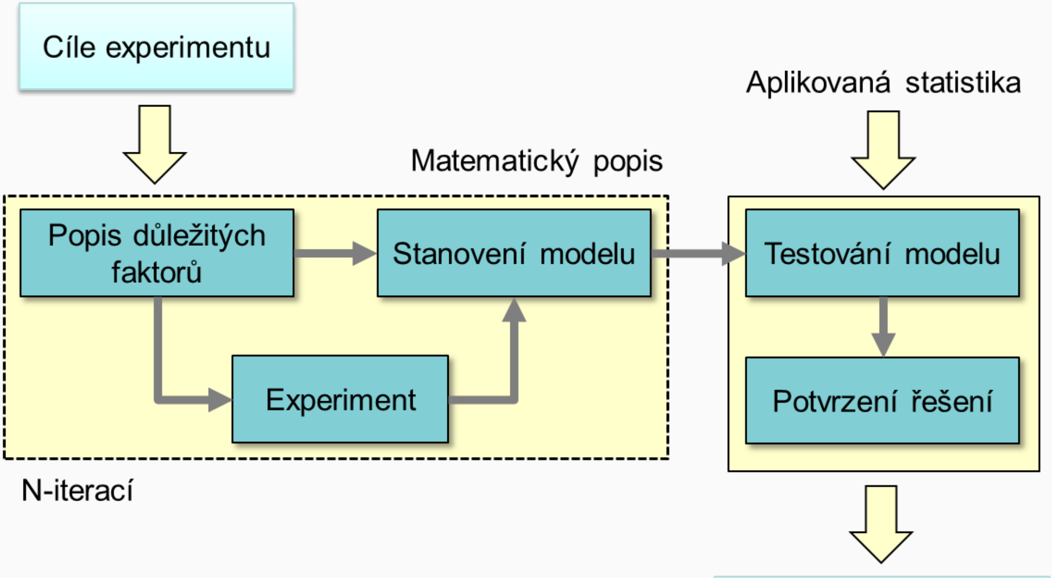
Za model můžeme pokládat náhradu nebo zjednodušení **skutečného objektu reálného světa** z hlediska jeho vlastností a funkčnosti.

Modelování je možné pouze pokud zavedeme **určitý stupeň** abstrakce a aproximace.

Diskrétní a spojitý model





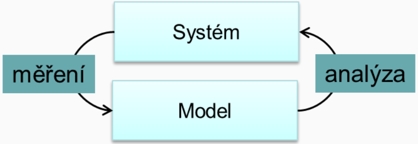

Cíle experimentu
Aplikovaná statistika
Matematický popis
Popis důležitých faktorů
Stanovení modelu
Testování modelu
Experiment
Potvrzení řešení
N-iterací

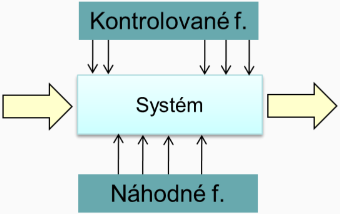
Při analýze navrženého modelu chceme učinit co možná nejsilnější rozhodnutí na základě malého množství dat. Správnost našeho návrhu je nutné statisticky vyhodnotit.

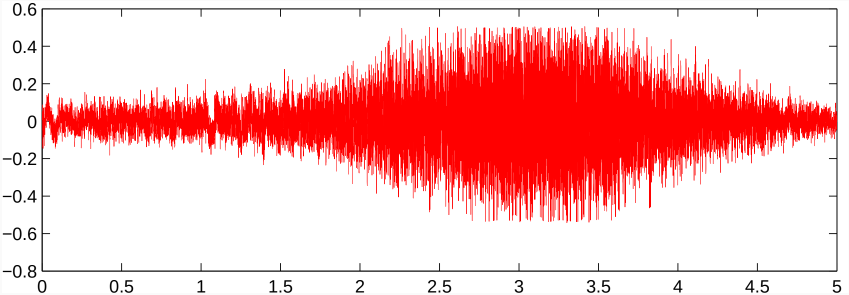
Problémy:

a) Významné diference ve sledovaných parametrech mohou být způsobeny špatným návrhem modelu, případně měřením dat

b) Je těžké rozlišit, zda diference v datech jsou skutečné nebo způsobené „náhodným vlivem".







a teď jeho zvuk zvuk auta

Proč modelování systémů?

Otázky:

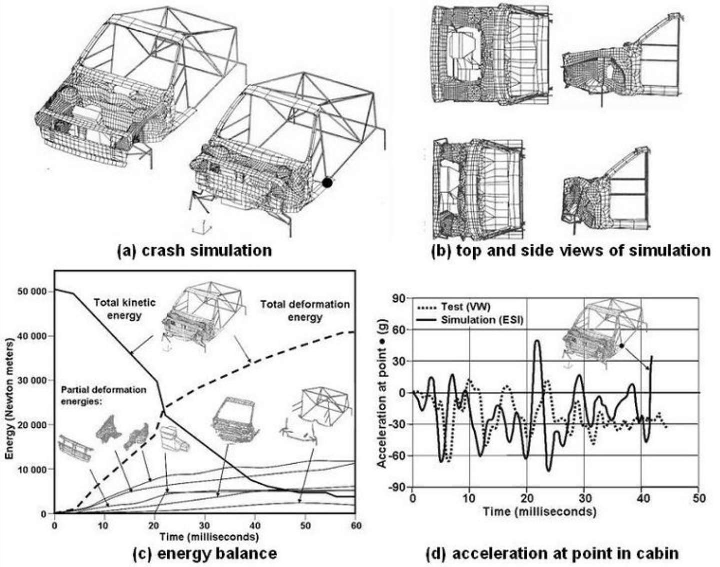
- Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- Jak ověříme pevnost nového mostu?
- Jak ověříme bezpečnost softwaru zabezpečovacího zařízení?
- Jak předpovíme dopravní zácpu na dálnici?
- Jak zajistíme spolehlivou funkci navigace pří výpadku signálu GPS?

Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!

Modely reálného světa – Antoni Gaudí

Modely reálného světa – Antoni Gaudí

Modely reálného světa – VW Polo crash test



Dynamický systém má v každém okamžiku **stav**, daný množinou reálných čísel. Tento stav lze reprezentovat jako bod ve stavovém prostoru (tedy jako **vektor**, často $\mathbf{x}$).

Evoluční pravidlo (rovnice vývoje stavu) popisuje přechody mezi jednotlivými stavy dynamického systému.

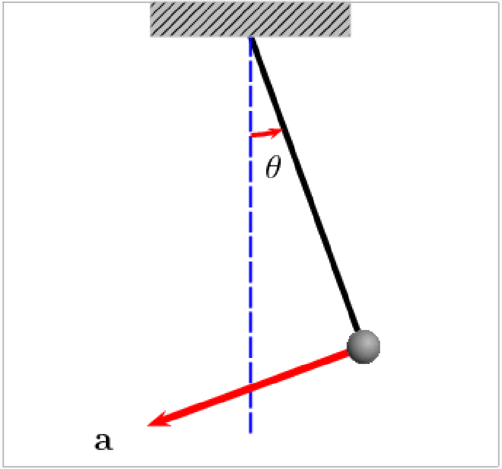
Toto pravidlo je

- většinou deterministické, ale
- může být stochastické.

Pozor: V matematice a fyzice tak nazýváme **systémy citlivé na počáteční podmínky** (dvojité kyvadlo, Lorenzův atraktor)

Dynamické systémy, příklad 1: Kyvadlo

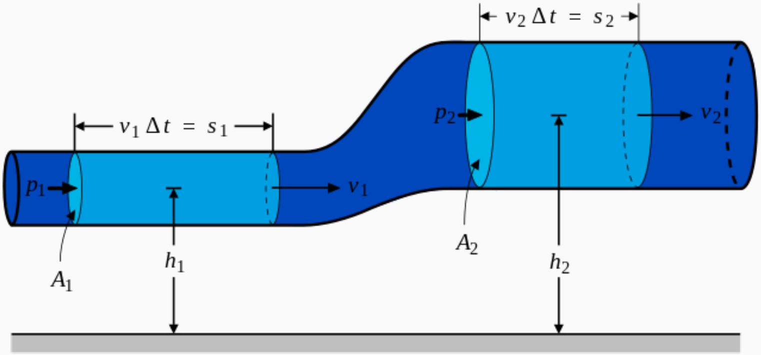
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$



Dynamické systémy, příklad 2: Tok kapaliny

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathrm{u}) = 0$$

$$\frac{D\mathrm{u}}{Dt} = \mathrm{F} - \frac{\nabla p}{\rho}$$

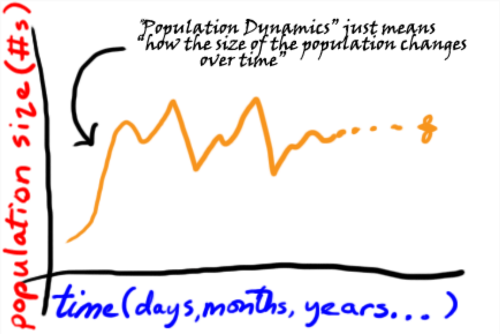


Exponenciální růst

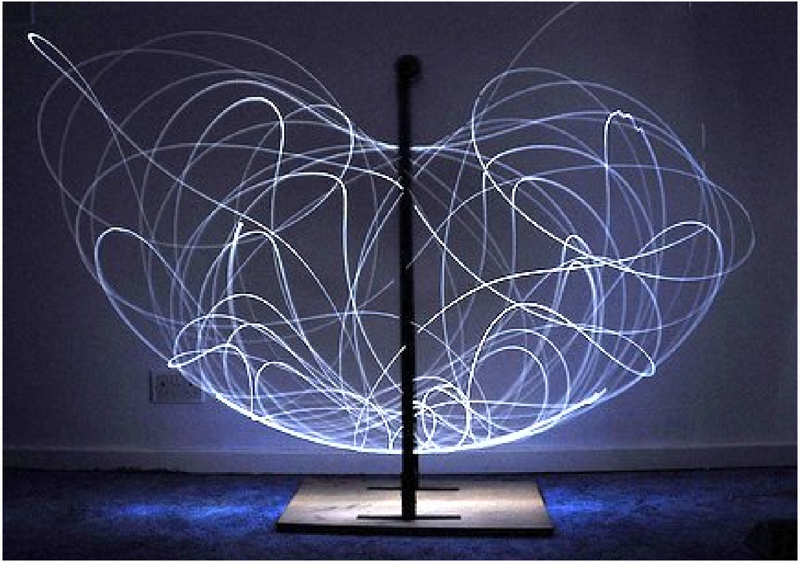
$$\dot{N} = rN$$

Logistický růst

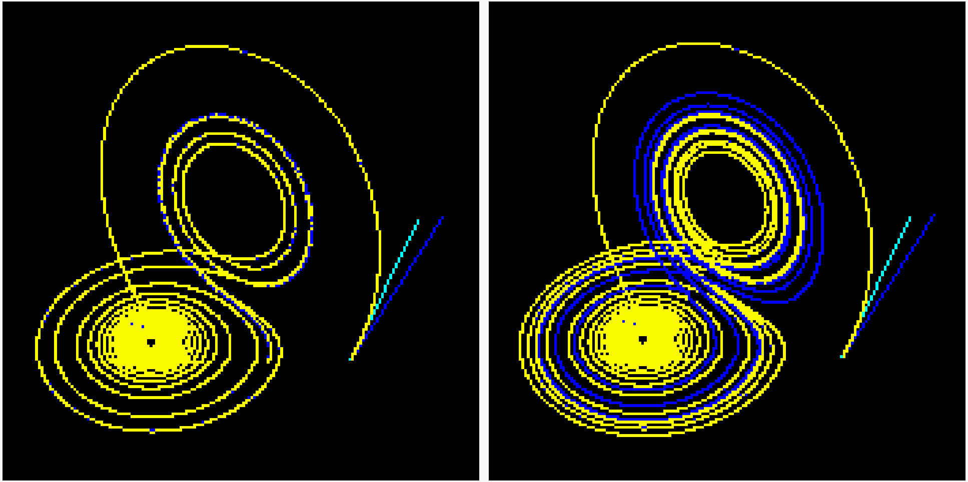
$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$



Dynamické systémy – příklad 4: Dvojité kyvadlo

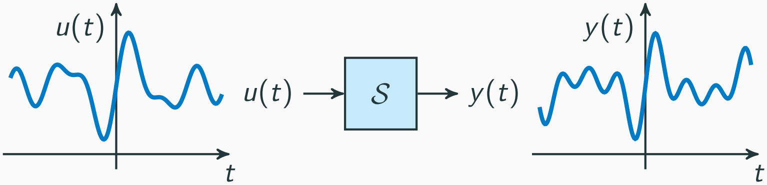


Dynamické systémy, příklad 5: Lorenzův atraktor



Vnější popis dynamických systémů

Vnější popis vychází z popisu systému vektorem vstupu **u** a vektorem výstupu **y**.



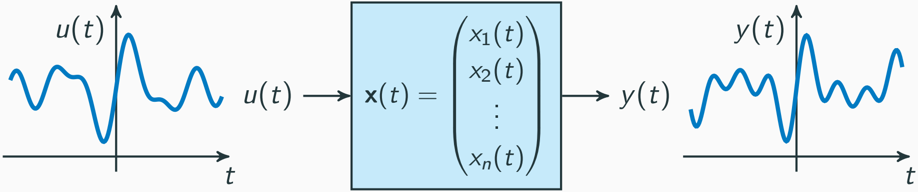
Stavový vektor systému **x** nepoužíváme: Systém chápeme jako černou skříňku, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat její reakci na vnější události (signály, data).

Vnější model popisujeme diferenciální rovnicí pro systémy se spojitým časem a diferenční rovnicí pro systémy s diskrétním časem. Uvedená rovnice je obecně vyššího řádu, než 1.

Vnitřní popis dynamických systémů

Vnitřní, tzv. stavový popis systému používá k popisu dynamiky systému vektor vnitřních stavů **x**.

Vektor vstupů **u** a vektor výstupních veličin **y** jsou druhotné veličiny vnitřního popisu.



Stavové modely popisujeme

- soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a
- soustavou diferenčních rovnic prvého řádu pro systémy s diskrétním časem.

Role matematiky

Modelování není samospasitelné:

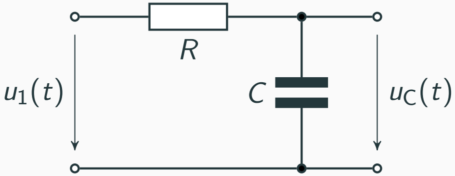
- model je pouze přiblížením reality,
- výstupy modelu je proto vždy třeba ověřovat,
- možné chyby jsou jak v modelu, tak i v jeho výpočtu.

Rozlišujeme dva kroky ověření:

Verifikace: Počítáme správný model.

Validace: Model počítá správně (bez numerických chyb).

Příklad modelování spojitého systému



Napětí $u_1(t)$ na RC článku je součet napětí na rezistoru $u_R(t)$ a na kapacitoru $u_C(t)$:

$$u_1(t) = u_R(t) + u_C(t).$$

Proud procházející obvodem $i(t)$ a časový průběh napětí na rezistoru $u_{\mathrm{R}}(t)$ je možno vyjádřit jako

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{\mathrm{C}}(t)$$

a proto

$$u_{\mathrm{R}}(t) = R \cdot i(t) = RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{\mathrm{C}}(t).$$

Dosazením $u_\mathrm{R}(t)$ získáme diferenciální rovnici prvního řádu pro časový průběh napětí na kapacitoru $u_\mathrm{C}(t)$:

$$RC\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_\mathrm{C}(t) + u_\mathrm{C}(t) = u_1(t).$$

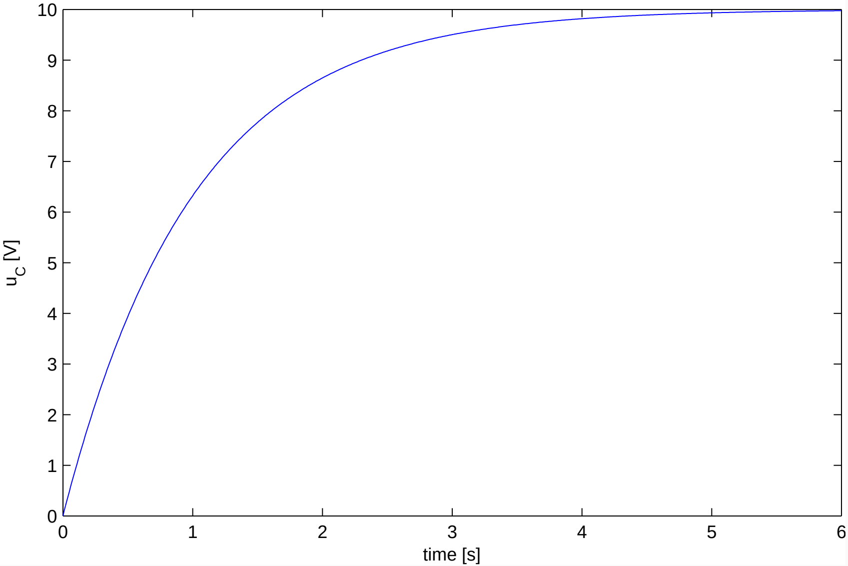
Řešení uvedené rovnice má pro všechna $t \geq 0$,

$$\alpha = \frac{1}{RC},$$
$$u_1(t) = U_0$$

a pro počáteční hodnotu $u_\mathrm{C}(0) = 0$ tvar

$$u_\mathrm{C}(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}).$$

Příklady systémů – Výstup integračního RC článku



Příklad modelování diskrétního systému

Rovnice nabídky

Nabídka dnes závisí na včerejší ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n[k] = \mathcal{C}c[k-1] + \mathcal{A}u[k].$$

Rovnice poptávky

Poptávka dnes závisí na dnešní ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$p[k] = -\mathcal{D}c[k] + \mathcal{B}u[k].$$

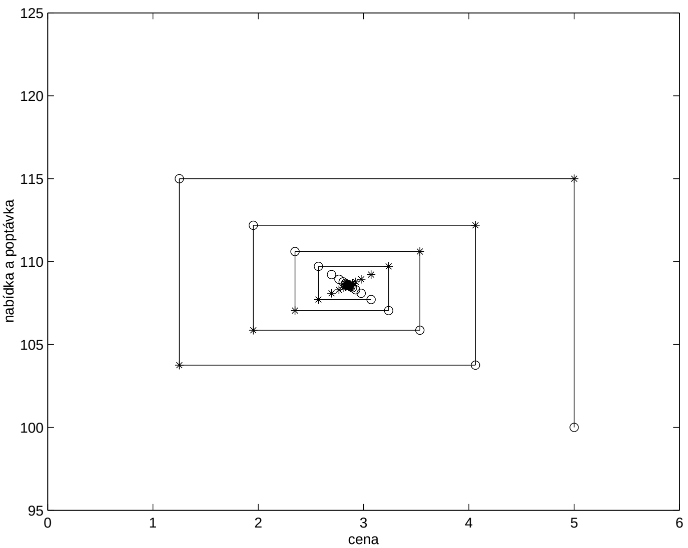
Rovnost nabídky a poptávky

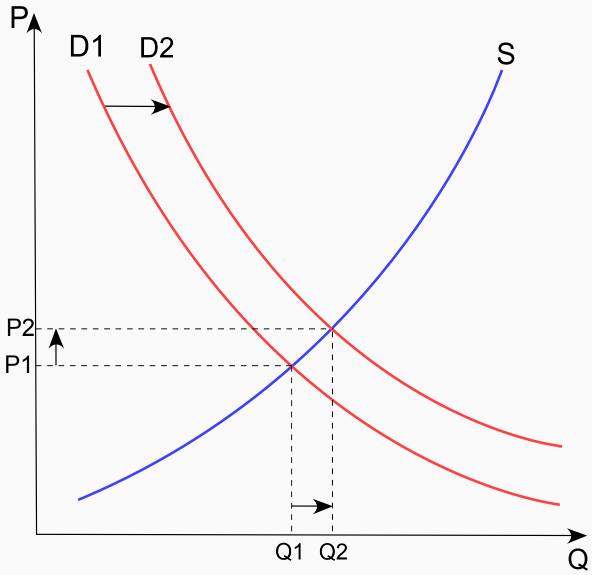
$$n[k] = p[k]$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c[k-1] = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} u[k].$$

Příklady systémů – Příklad variace ceny




P
D1
D2
S
P2
P1
Q1
Q2
Q

Obsah přednášky

Iterací rozumíme obecně opakování nějakého postupu, v matematice například opakované vyhodnocení funkce. Výsledky z jedné iterace se použijí jako vstup pro další iterační krok.

Iteračně například

- hledáme nulové body funkce, $f(x^*) = 0$
- simulujeme vývoj diskretizovaného dynamického systému

Diferenční rovnici se vstupem $u[n]$ a výstupem $y[n]$ můžeme přepsat do tvaru

$$y[n+1] = f(y[n], y[n-1], \ldots, u[n], u[n-1], \ldots)$$

stanovit tzv. počáteční podmínky dané řádem systému a potom například pro $n = 2, 3, \ldots$ s počátečními podmínkami $y[0], y[1], y[2]$ iterativně počítat výstupy diskrétního systému $y[3], y[4], \ldots$.

Podobný postup se používá pro numerickou simulaci spojitých systémů. V tom případě se spojité funkce vyhodnocují v předem stanovených časových okamžicích, výsledek není tedy zcela přesný.

Diferenční rovnici

$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c[k-1] = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} x[k],$$

odvozenou na předešlých slajdech přepíšeme do kanonického tvaru

$$y[k] + \gamma y[k-1] = \beta u[k]$$

a postupnými iteracemi nalezneme pro $u[k] = 1[k]$ a počáteční podmínku $y[-1] = 0$:

Iterace rovnice ceny

Pro $k = 0$:

$$
\begin{aligned}
y[0] + \gamma y[-1] &= \beta u[0] \\
y[0] &= \beta - \gamma y[-1] = \beta
\end{aligned}
$$

Pro $k = 1$:

$$
\begin{aligned}
y[1] + \gamma y[0] &= \beta u[1] \\
y[1] &= \beta - \gamma y[0] = \beta - \beta\gamma
\end{aligned}
$$

Pro $k = 2$:

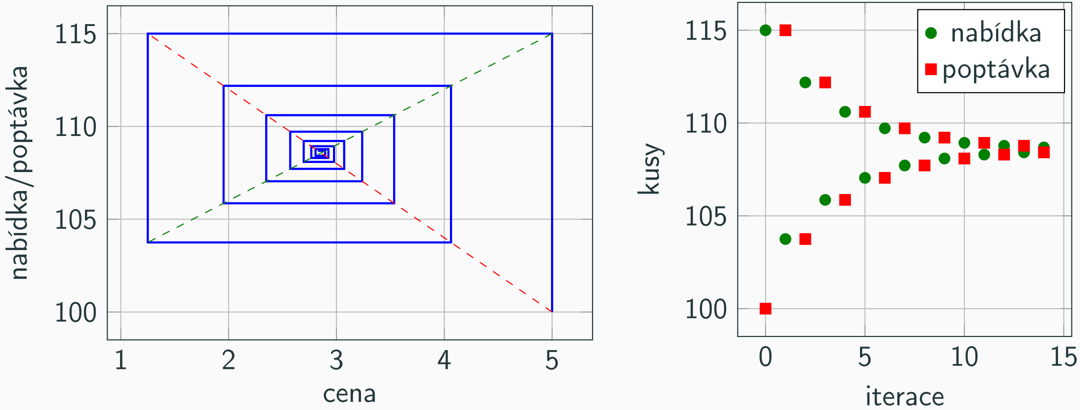
$$y[2] + \gamma y[1] = \beta u[2]$$
$$y[2] = \beta - \gamma y[1] = \beta - \beta\gamma + \beta\gamma^2$$

Pro obecné n:

$$y[n] + \gamma y[n-1] = \beta u[n]$$
$$y[n] = \beta - \gamma y[n-1] = \beta \left(1 - \gamma + \gamma^2 + \cdots + (-\gamma)^n\right)$$

Iterace rovnice ceny

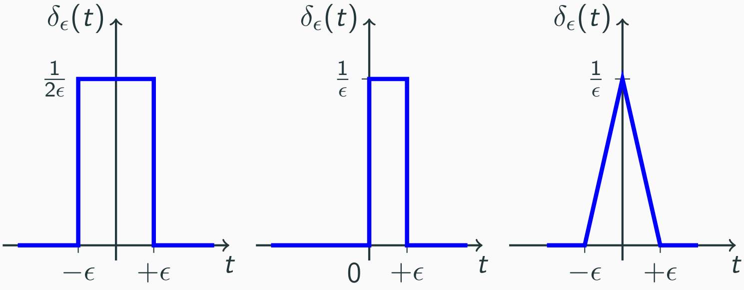
$$y[n] = \beta \sum_{m=0}^{n} (-\gamma)^m = \beta \frac{1-(-\gamma)^{n+1}}{1+\gamma} = \frac{\beta}{1+\gamma} + \frac{\beta\gamma}{1+\gamma}(-\gamma)^n$$



Obsah přednášky

Diracův impuls – Přiblížení

Tato funkce je definována na časovém intervalu pro všechna t a její nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu $t = 0$. Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé $\varepsilon > 0$.



Funkci $\delta(t)$ definujeme jako $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t)$.

Diracův impuls – Definice

Funkce $\delta(t)$ se nazývá **Diracův impuls**, Diracova δ-funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota $\delta(t)$ pro $t \neq 0$ je $\delta(t) = 0$. Její hodnota v $t = 0$ není definována jako funkce, používá se integrální definice

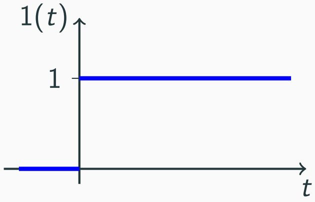
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0-}^{0+} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

pro každé $\epsilon > 0$.

Jednotkový skok

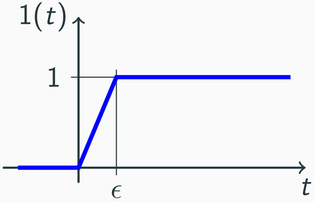
Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena $1(t)$ a je definována jako

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$



Platí

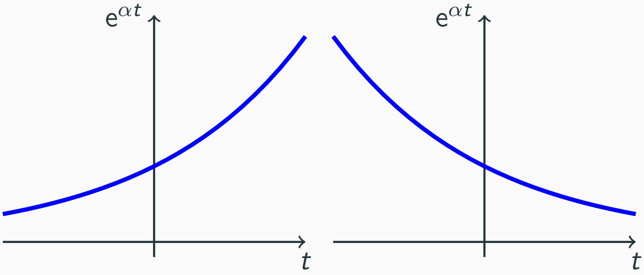
$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} 1(t).$$



Uvažujme exponenciální funkci

$$f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t},$$

kde α je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.



Exponenciální funkce

$$f(t) = A\,\mathrm{e}^{\alpha t},$$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$, je zajímavá hlavně v případě, kdy $\alpha = \mathrm{i}\omega$,

$$f(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = A\left(\cos\omega t + \mathrm{i}\,\sin\omega t\right).$$

O spojitém signálu $f(t)$ říkáme, že je periodický s periodou T, jestliže

$$\forall t : f(t + T) = f(t)$$

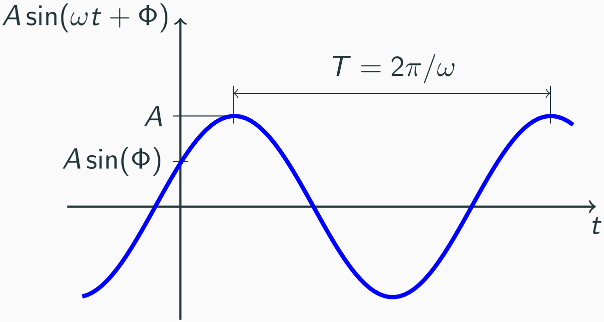
a tedy také pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$

$$f(t) = f(t + T) = f(t + 2T) = \cdots = f(t + k \cdot T)$$

Nejmenší možné T nazýváme **fundamentální perioda**, značíme T_0.

Sinusová funkce

$$f(t) = A \sin(\omega t + \Phi),$$



Konstanty A, ω a Φ se nazývají **amplituda**, **úhlová frekvence** a **fázový posun**.
Sinusovka je periodická se základní periodou $T = 2\pi/\omega$.

Obsah přednášky

Vznik diskrétních signálů

Jak diskrétní signály vznikají?

- **přirozeně** (průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů)
- **vzorkováním spojitých signálů** (naměření teploty každou hodinu, měřením průtoku každých 15 minut)

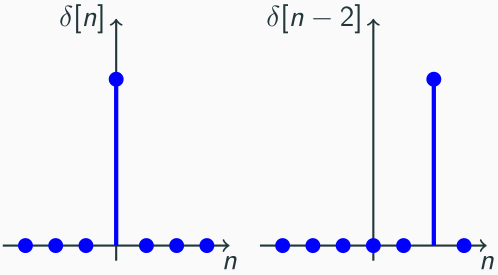
Diskrétní signály, jimiž se budeme v předmětu zabývat, jsou diskrétní v čase, ale spojité ve funkční hodnotě.

Digitální signál je totiž často **kvantovaný**, nabývá tedy v každém n pouze diskrétní množiny funkčních hodnot, například $\{0, 1, 2, \ldots, 65535\}$.

Diskrétní jednotkový impuls

Diskrétní jednotkový impuls $\delta[n]$ je definován vztahem

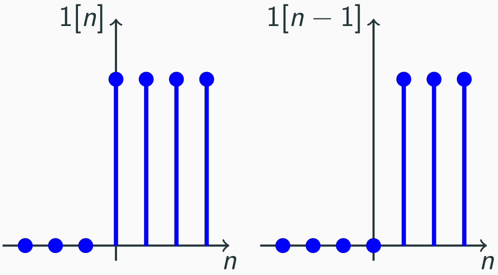
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0. \end{cases}$$



Diskrétní jednotkový skok

Diskrétní jednotkový skok $1[n]$ je definován vztahem

$$1[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0, \\ 0 & \text{pro } n < 0. \end{cases}$$

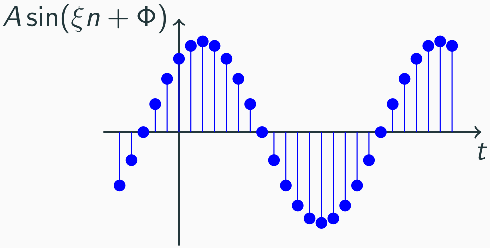


Diskrétní sinusová posloupnost

Mějme sinusový signál $f(t) = A\sin(\omega t + \Phi)$ s periodou $T = 2\pi/\omega$.
Pokud tento signál vzorkujeme s periodou $T_s > 0$, získáme diskrétní sinusový signál

$$f[n] = f(nT) = A\sin(\omega n T_s + \Phi) = A\sin(\xi n + \Phi),$$

kde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ a $\xi = \omega T_s$.



Periodický signál

Diskrétní signál $f[n]$ je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo N takové, že platí

$$f[n] = f[n+N] = f[n+2N] = \cdots = f[n+k\cdot N]$$

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ (z intervalu $(-\infty,\ \infty)$) a pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. N se nazývá **perioda diskrétního signálu**.

Nejmenší možné N nazýváme **fundamentální perioda** a značíme N_0.

Periodický signál

Diskrétní sinusový signál nemusí být nutně periodický, záleží na volbě vzorkovací periody T_s. Pro periodický diskrétní sinusový signál s periodou N musí platit

$$N = m \cdot \frac{2\pi}{T_s},$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Máme i $N \in \mathbb{N}$, proto $2\pi/T_s$ musí být racionální číslo.

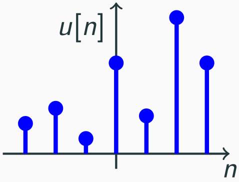
Příklad (Neperiodický sinusový signál)

Signál

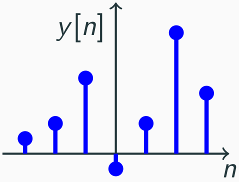
$$y[n] = \sin n$$

není pro $T_s = 0.1\,\mathrm{s}$ periodický, protože $2\pi/T_s$ není racionální číslo.

Obsah přednášky



$u[n] \longrightarrow \boxed{\mathrm{LTI}} \longrightarrow y[n]$



Definice (Impulsní odezva)

Odezvu systému na jednotkový impuls $\delta[n]$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h[n]$,

$$
\begin{aligned}
h[n] &= \mathcal{S}\{\delta[n]\} \\
h[n, m] &= \mathcal{S}\{\delta[n - m]\} .
\end{aligned}
$$

ČVUT ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Definice (Přechodová odezva)

Odezvu systému na jednotkový skok $1[n]$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s[n]$,

$$s[n] = \mathcal{S}\{1[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^{n} \delta[n-m]\right\}.$$

Lineární systém

Definice (Linearita)

V matematice označujeme funkci $f(x)$ jako lineární v případě, že je

a) aditivní $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ a

b) homogenní, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Obdobně to platí i pro lineární systémy.

Definice (Lineární systém)

Systém je lineární, pokud pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$\mathcal{S}\{u_1[n] + u_2[n]\} = \mathcal{S}\{u_1[n]\} + \mathcal{S}\{u_2[n]\}\,,$$
$$\mathcal{S}\{\alpha u[n]\} = \alpha\mathcal{S}\{u[n]\}\,.$$

Princip superpozice

Definice (Princip superpozice)

Pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$y_1[n] = \mathcal{S}\{u_1[n]\}$$
$$y_2[n] = \mathcal{S}\{u_2[n]\}$$

a pro $u[n] = \alpha u_1[n] + \beta u_2[n]$ také

$$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\{\alpha u_1[n] + \beta u_2[n]\}$$

Obecně platí

$$u[n] = \sum_i a_i u_i[n] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_i a_i y_i[n] = \sum_i a_i \mathcal{S}\{u_i[n]\}$$

Příklad (Lineární systém)

Uvažujme systém

$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n].$$

Je-li na vstupu lineární kombinace dvou různých signálů

$$u[n] = b_1\,u_1[n] + b_2\,u_2[n]$$

je na výstupu

$$y[n] = b_1\,(y_1[n] + a\,y_1[n-1]) + b_2\,(y_2[n] + a\,y_2[n-1])$$

kde

$$y_1[n] + a\,y_1[n-1] = u_1[n]$$
$$y_2[n] + a\,y_2[n-1] = u_2[n]$$

ČVUT ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Příklad (Nelineární systém)

Numerický výpočet druhé odmocniny lze zapsat rekurentním vztahem

$$y[n+1] = \frac{1}{2}\left(y[n] + \frac{u[n]}{y[n]}\right).$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna $\sqrt{10} = 3{,}16227766017$. Pro $u[n] = u[0] = 10$ dostáváme postupně

n	$y[n]$	$y^2[n]$
1	3	9
2	3,165	10,017225
3	3,162278	10,00000214928
4	3,162277660	9,999999999568
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Pro obecný vstupní signál $u[n]$ je pak odezva lineárního systému

$$y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,\delta[n-m]\right\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,\mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,h[n,m].$$

Vidíme, že chování systému je zcela určeno jeho odezvami na různě posunuté jednotkové pulsy $h[n,m]$.

Přechodová odezva diskrétního lineárního systému $s[n]$ je dána prostým součtem impulsních odezev pro $0 \leq m \leq n$

$$
\begin{aligned}
s[n] = \mathcal{S}\{1[n]\} &= \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^{n} \delta[n-m]\right\} \\
&= \sum_{m=0}^{n} \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=0}^{n} h[n, m].
\end{aligned}
$$

Lze za nějakých podmínek zjednodušit $h[n, m]$?

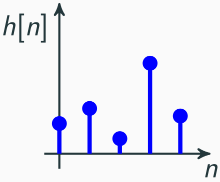
Systém se nazývá **časově invariantní**, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n - m$ a nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

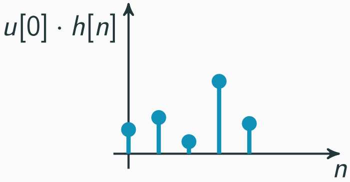
$$\begin{array}{rcc} \text{dnes} & \ldots & y[n] = \mathcal{S}\left[u[n]\right] \\ \text{včera} & \ldots & y[n-1] = \mathcal{S}\left[u[n-1]\right] \\ & & \vdots \end{array}$$

Potom také rovnice pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

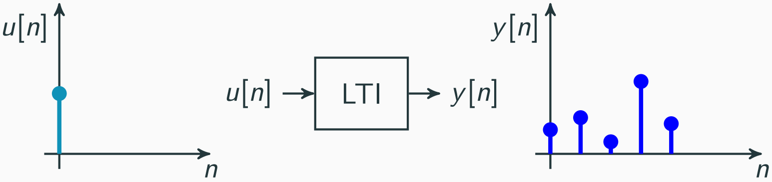
$$h[n, m] \rightarrow h[n - m] = \mathcal{S}\{\delta[n - m]\}\,.$$

Časově invariantní systém





$$y[n] = u[0] \cdot h[n]$$



V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice **konvoluční sumu**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m] \cdot u[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k],$$

kterou pro úsporu místa značíme

$$y[n] = h[n] * u[n].$$

Pozor: nejde o násobení!

$$h[n] \neq \frac{y[n]}{u[n]}$$

Příklad (Časově invariantní systém)

Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsaný diferenční rovnici

$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n].$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj. a je konstantní a není funkcí n, zachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n - m$. Impulsní odezva je potom

$$h[n] = (-a)^n 1[n].$$

Příklad (Časově proměnný systém)

Uvažujme nyní obměněnou diferenční rovnici

$$y[n] + n \cdot y[n-1] = u[n].$$

Koeficient u $y[n-1]$ závisí na čase a tato rovnice nezachovává tvar při záměně $n \to n-m$. Impulsní odezvu lze psát ve tvaru

$$h[n] = (-1)^n \, n! \, 1[n].$$

Kauzální systém

Systém je **kauzální**, pokud jeho výstup závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupů.

Výstupní signál $y[n]$ kauzálního systému tedy závisí pouze na $\{u[n], u[n-1], u[n-2], \ldots\}$. V konvoluční sumě proto

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, u[n-k] \\
&= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]\, u[n-k]}_{0} + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, u[n-k]
\end{aligned}
$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy $h[n] = 0$ pro $n < 0$.

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k] \cdot h[n-k].$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall n < 0 : u[n] = 0, y[n] = 0$ (oba signály mohou mít nenulové členy pouze pro $n \geq 0$), potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} h[n-k] \cdot u[k].$$

Definice (Impulsní odezva)

Odezvu systému na Diracův impuls $\delta(t)$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h(t)$,

$$h(t) = \mathcal{S}\{\delta(t)\}$$
$$h(t,\tau) = \mathcal{S}\{\delta(t-\tau)\}\,.$$

Definice (Přechodová odezva)

Odezvu systému na jednotkový skok $1(t)$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s(t)$,

$$s(t) = \mathcal{S}\{1(t)\} = \mathcal{S}\left\{\int_0^t \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t\right\}.$$

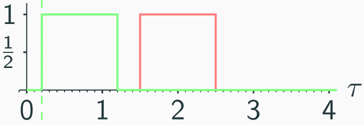
V případě spojitého casu postupujeme podobně a odvodíme pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\cdot u(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

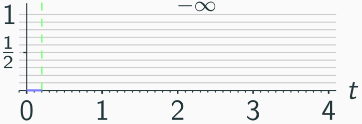
Operaci často zapisujeme ve zjednodušené formě jako

$$y(t) = h(t) * u(t).$$

Opět připomínáme, že se v tomto zápisu nejedná o násobení!



$$u(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$



$$\boxed{u(\tau)h(0.2-\tau)}$$

Pro $u(t) = \delta(t)$ platí pro lineární a časové invariantní systém samozřejmě

$$y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau = h(t).$$

Výstupní signál $y(t)$ spojitého kauzálního systému závisí pouze na hodnotách vstupů pro předešlé časové okamžiky. Z důvodu, které klademe na kauzální chování systému, přejde konvoluční integrál na tvar

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$
$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau}_{0} + \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

a hodnoty impulsní odezvy pro $t < 0$ uvažujeme opět $h(t) = 0$.

Konvoluční integrál pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau) \cdot u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty u(\tau) \cdot h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall t < 0 : u(t) = 0, y(t) = 0$ (oba signály mohou být nenulové členy pouze pro $t \geq 0$), potom platí

$$y(t) = \int_0^t h(\tau) \cdot u(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^t u(\tau) \cdot h(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Definice (Autonomní systém)

Za autonomní systém považujeme takový, který **nemá vstup**. Diskrétní autonomní systém je popisuje tedy například diferenční rovnice vnějšího popisu

$$y[n+1] + a\,y[n] = 0.$$

Výstup autonomního systému je odezvou na počáteční podmínky.

V případě, že systém má vstup $u[n]$, tedy

$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n],$$

systém pokládáme za neautonomní.

Definice stability

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

Impulsní odezvu spojitého LTI systému lze vždy zapsat jako součet exponenciel ve tvaru

$$h(t) = \sum_{\mu=0}^{n} k_\mu \mathrm{e}^{p_\mu t}.$$

kde p_μ jsou tzv. póly přenosové funkce systému.

Pro $p_\mu \in \mathbb{R}$ je $h(t)$ reálná exponenciela, která pro $t \to \infty$ buď roste nade všechny meze ($p_\mu > 0$) nebo klesá k nule ($p_\mu < 0$).

Pro $p_\mu \in \mathbb{C}$ je $h(t)$ komplexní exponenciela, která pro $t \to \infty$ kmitá a buď roste nade všechny meze nebo klesá k nule, záleží na $\Re p_\mu$.

Z výše uvedené úvahy vyplývá, jak z polohy pólů přenosové funkce jednoduše odvodíme tvar impulsní odezvy a tedy stabilitu ($\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$) respektive nestabilitu ($\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$) systému:

- Pro stabilní systém platí $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$.
- V impulsní odezvě se nachází minimálně jedna rostoucí exponenciela, jež bude hodnotě $h(t)$ postupně dominovat, a je tedy $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$.
- Systém může být ale nestabilní i v jiných případech, kdy také $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$.