Vícekriteriální optimalizace

Matematické metody pro ITS (11MAMY)

Jan Přikryl

13. přednáška 11MAMY

úterý 28. března 2023

verze: 2023-03-20 16:27

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

Motivace

Většina problémů v přírodě má několik (možná konfliktních) cílů, které mají být splněny.

Mnoho z těchto problémů je často považováno za problémy s optimalizací jednoho cíle transformací všech až na jeden cíl do omezení.

Příklady vícekriteriální optimalizace

- Vyhledávání dopravního spojení (operační výzkum). Zde kritériem může být minimální přepravní čas, cena přepravy, počet přestupů, maximalizace pohodlí (ne moc krátké a dlouhé přestupy).
- Rozvrhování posádek (letci, vlaky – operační výzkum). Kritériem je minimální cena a maximální robustnost (odolnost proti zpoždění, např. delšími rozestupy).
- Dynamické vyvažování zátěže ve virtualizačních klastrech (softwarové inženýrství). Chceme vybalancovat zatížení virtuálních mašin fyzickým strojům, kritérii jsou vytíženost CPU, paměti, prostoru, . . .
- Design elektrických obvodů počítačových čipů (elektronika). Kritéria zde jsou maximalizace rychlosti obvodu, minimalizace povrchu a uvolněného tepla.
- Barva kůže (příroda). Světlá kůže absorbuje více vitamínu D, naopak tmavá lépe chrání lidskou pokožku a důležité sloučeniny, jako například foláty. Tato dvě kritéria jdou přímo proti sobě, jak to příroda vyřešila?

Příklady vícekriteriální optimalizace

- Vyhledávání dopravního spojení (operační výzkum). Zde kritériem může být minimální přepravní čas, cena přepravy, počet přestupů, maximalizace pohodlí (ne moc krátké a dlouhé přestupy).
- Rozvrhování posádek (letci, vlaky – operační výzkum). Kritériem je minimální cena a maximální robustnost (odolnost proti zpoždění, např. delšími rozestupy).
- Dynamické vyvažování zátěže ve virtualizačních klastrech (softwarové inženýrství). Chceme vybalancovat zatížení virtuálních mašin fyzickým strojům, kritérii jsou vytíženost CPU, paměti, prostoru, . . .
- Design elektrických obvodů počítačových čipů (elektronika). Kritéria zde jsou maximalizace rychlosti obvodu, minimalizace povrchu a uvolněného tepla.
- Barva kůže (příroda). Světlá kůže absorbuje více vitamínu D, naopak tmavá lépe chrání lidskou pokožku a důležité sloučeniny, jako například foláty. Tato dvě kritéria jdou přímo proti sobě, jak to příroda vyřešila?

Příklady vícekriteriální optimalizace

- Vyhledávání dopravního spojení (operační výzkum). Zde kritériem může být minimální přepravní čas, cena přepravy, počet přestupů, maximalizace pohodlí (ne moc krátké a dlouhé přestupy).
- Rozvrhování posádek (letci, vlaky – operační výzkum). Kritériem je minimální cena a maximální robustnost (odolnost proti zpoždění, např. delšími rozestupy).
- Dynamické vyvažování zátěže ve virtualizačních klastrech (softwarové inženýrství). Chceme vybalancovat zatížení virtuálních mašin fyzickým strojům, kritérii jsou vytíženost CPU, paměti, prostoru, . . .
- Design elektrických obvodů počítačových čipů (elektronika). Kritéria zde jsou maximalizace rychlosti obvodu, minimalizace povrchu a uvolněného tepla.
- Barva kůže (příroda). Světlá kůže absorbuje více vitamínu D, naopak tmavá lépe chrání lidskou pokožku a důležité sloučeniny, jako například foláty. Tato dvě kritéria jdou přímo proti sobě, jak to příroda vyřešila?

Příklady vícekriteriální optimalizace

- Vyhledávání dopravního spojení (operační výzkum). Zde kritériem může být minimální přepravní čas, cena přepravy, počet přestupů, maximalizace pohodlí (ne moc krátké a dlouhé přestupy).
- Rozvrhování posádek (letci, vlaky – operační výzkum). Kritériem je minimální cena a maximální robustnost (odolnost proti zpoždění, např. delšími rozestupy).
- Dynamické vyvažování zátěže ve virtualizačních klastrech (softwarové inženýrství). Chceme vybalancovat zatížení virtuálních mašin fyzickým strojům, kritérii jsou vytíženost CPU, paměti, prostoru, . . .
- Design elektrických obvodů počítačových čipů (elektronika). Kritéria zde jsou maximalizace rychlosti obvodu, minimalizace povrchu a uvolněného tepla.
- Barva kůže (příroda). Světlá kůže absorbuje více vitamínu D, naopak tmavá lépe chrání lidskou pokožku a důležité sloučeniny, jako například foláty. Tato dvě kritéria jdou přímo proti sobě, jak to příroda vyřešila?

Příklady vícekriteriální optimalizace

- Vyhledávání dopravního spojení (operační výzkum). Zde kritériem může být minimální přepravní čas, cena přepravy, počet přestupů, maximalizace pohodlí (ne moc krátké a dlouhé přestupy).
- Rozvrhování posádek (letci, vlaky – operační výzkum). Kritériem je minimální cena a maximální robustnost (odolnost proti zpoždění, např. delšími rozestupy).
- Dynamické vyvažování zátěže ve virtualizačních klastrech (softwarové inženýrství). Chceme vybalancovat zatížení virtuálních mašin fyzickým strojům, kritérii jsou vytíženost CPU, paměti, prostoru, . . .
- Design elektrických obvodů počítačových čipů (elektronika). Kritéria zde jsou maximalizace rychlosti obvodu, minimalizace povrchu a uvolněného tepla.
- Barva kůže (příroda). Světlá kůže absorbuje více vitamínu D, naopak tmavá lépe chrání lidskou pokožku a důležité sloučeniny, jako například foláty. Tato dvě kritéria jdou přímo proti sobě, jak to příroda vyřešila?

ČVUT
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Definice (Vícekriteriální programování)

Úlohou vícekriteriálního programování je

$$\mathbf{x}^* = \arg\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{M}} \mathrm{f}(\mathbf{x}),$$

kde $\mathcal{M} \subseteq \mathbb{R}^n$ je **množina přípustných řešení** a $\mathrm{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x})) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ je vektorová funkce.

Formálně není úloha dobře definovaná, na prostoru $\mathbb{R}^m$ nemáme úplné uspořádání. Je tedy potřeba říci, co rozumíme řešením vícekriteriální úlohy.

Ideální řešení je takové řešení $\mathbf{x}^* \in \mathcal{M}$, pro které platí $\mathrm{f}_i(\mathbf{x}^*) = \min_{\mathcal{M}} \mathrm{f}_i(\mathbf{x})$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$. Je zřejmé, že ideální řešení prakticky nikdy neexistuje, a proto je potřeba zavést jiný koncept řešení.

Vícekriteriální optimalizace

Optimalizace více funkcí najednou

Je zapotřebí další matematický aparát

Obecně

$$
\begin{aligned}
\mathbf{y} = \arg\min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})) \\
\text{pokud } \mathbf{g}_i(\mathbf{x}) &= 0, \quad i = 0, 1, \dots, n_\mathrm{e} \\
\mathbf{h}_j(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad j = 0, 1, \dots, n_\mathrm{i}
\end{aligned}
$$

Vztah jedno- a vícekriteriální optimalizace

Jednokriteriální optimalizace je speciální případ vícekriteriální optimalizace (nikoliv naopak!).

Pro $\mathbf{y} = \arg\min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$ Jednokriteriální optimalizace je speciální případ vícekriteriální optimalizace (nikoliv naopak!).

Přístupy

Rozhodování před optimalizací (definice jediné cílové funkce) => EA Rozhodování po optimalizaci (nalezení Pareto-optimální množiny) => MOEA Rozhodování v průběhu optimalizace (interaktivně) => interaktivní algoritmy, např. NIMBUS

Pareto-optimalita: optimální/kompromisní množina řešení (všechny funkce mají stejnou důležitost)

Stránka 2 Obrys 1 Úvod Motivace Definice Pojem optima 2 Dominance a Pareto-optimálnost Ideální, utopické a nadirské objektivní vektory Vztah dominance a vlastnosti 3 Pareto-optimálnost Sada bez dominance Globálně a místně Pareto-optimální sady 4 Postup pro nalezení sady, která není ovládána Motivace Tři různé přístupy Nedominované třídění populace 5 Podmínky optimality

Motivace

Většina problémů v přírodě má několik (možná konfliktních) cílů, které mají být splněny.

Mnoho z těchto problémů je často považováno za problémy s optimalizací jednoho cíle transformací všech až na jeden cíl do omezení.

Rozsah optimalizace v praxi

Optimální design a výroba

Inverzní problémy: známý výstup, vyhledejte vstup.

Optimalizace parametrů pro optimální výkon

Modelování systému

Plánování

Optimální ovládání

Prognózy a predikce

Dolování dat (klasifikace, shlukování, rozpoznávání vzorů)

Strojové učení

Bioinformatika

Co je MOOP?

Ve slovech

Problém najít vektor rozhodovacích proměnných, které uspokojuje omezení a optimalizuje vektorovou funkci, jejíž prvky představují objektivní funkce.

Tyto funkce tvoří matematický popis výkonnostní kritéria, která jsou obvykle v rozporu s každým z nich jiný.

Pojem optimalizovat tedy znamená najít takové řešení, které poskytne hodnoty všech objektivních funkcí přijatelné pro osobu s rozhodovací pravomocí.

Co je MOOP? – Formální definice

$$\min F(x) = [f_1(x), f_2(x), \ldots, f_M(x)]$$

jsou dolní a horní mez pro každou rozhodovací proměnnou x i .

Řešení Edgeworth-Pareto

Pojem optima pro MOOPy

Najděte dobré kompromisy (nebo kompromisy) místo jediného řešení (globální optimalizace). Původně navrhl Francis Ysidro Edgeworth v roce 1881; později ji zobecnil Vilfredo Pareto (v roce 1896).

Strana 8 Rozhodovací prostor vs. objektivní prostor Při optimalizaci více cílů objektivní funkce tvoří multidimenzionální prostor Pro každé řešení x v rozhodovacím proměnném prostoru X tam je bod v objektivním prostoru Z označený f (x) = z = (z 1 , z 2 , ..., z M) T .

Konvexní a nekonvexní MOOP

Problém optimalizace více cílů je konvexní, pokud je objektivní funkce jsou konvexní a proveditelná oblast je konvexní. Definice Funkce $f : \mathbb{R}^n \to R$ je funkce konvexní, jestliže pro libovolnou dvojici řešení $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ platí následující podmínka:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

pro všechna $0 \leq \lambda \leq 1$. Protože MOOP má dva prostory, konvexnost musí být analyzovány na obou prostorech. Navíc, i když může být vyhledávací prostor nekonvexní, Pareto optimální přední strana může být konvexní.

Strana 10 Dva přístupy k optimalizaci více cílů Ačkoli řešení MOOP sestává ze sady řešení, z praktického hlediska uživatel potřebuje pouze jedno řešení Otázka: Které z těchto optimálních řešení si člověk musí vybrat? Dva možné přístupy: 1 P REFERENCE - NA ZÁKLADĚ POSTUP : Složená objektivní funkce jako vážený součet cíle Pouze pokud je znám faktor relativní preference cílů dopředu. 2 I DEAL POSTUP : 1 Najděte několik kompromisních řešení se širokou škálou hodnot pro cíle. 2 Vyberte jedno ze získaných řešení pomocí vyšší úrovně informace

Strana 11 Ideální objektivní vektor Definice M-tou složkou ideálního vektoru cílů z * je omezené minimum následujícího problému: min f m (x) podléhá $x \in S$. (3) Ideální vektor je tedy definován takto: z * = (f *) = (f.) * 1 , f * 2 , ..., f * M) T (4) kde f * i je hodnota funkce spojená s minimem řešení (x * i) pro funkci m-tého cíle.

Stránka 12 Ideální objektivní vektor Úvahy Ideální vektor objektivu obecně odpovídá a neexistující řešení. Jediný způsob, jak ideální objektivní vektor odpovídá a proveditelné řešení je, když je minimum všech cílů funkce jsou identické. V tomto případě nejsou cíle v rozporu. Ideální objektivní vektor označuje pole s dolní vázán na všechny objektivní funkce.

Stránka 13 Utopický objektivní vektor Některé algoritmy mohou vyžadovat řešení, které je přísně lepší než jakékoli jiné řešení ve vyhledávacím prostoru. Pro tento účel definujeme: Definice Utopický objektivní vektor z ** je vektor, jehož komponenty jsou o něco menší než ideální vektor objektivů: z ** i = z * i $-\varepsilon i s \varepsilon i > 0$ pro všechna $i \in 1, 2, \ldots, M$

Strana 14 Nadir Objektivní vektor Definice M-tou složkou nadirového objektivního vektoru z nad je omezené maximum následujícího problému: max f m (x) s výhradou $x \in \mathcal{P}$ kde P je Paretooptimální množina. Na rozdíl od ideálního objektivního vektoru představuje z nad horní vázán každé objektivní funkce v Pareto-optimální množině (ne v celém vyhledávacím prostoru).

Strana 15 Nadir a ideální objektivní vektory Vektor cíle nadir může představovat existující nebo neexistující řešení (v závislosti na konvexitě a kontinuita Pareto-optimální množiny). Aby bylo možné normalizovat každý cíl, znalost nadir a ideální vektory lze použít následovně: f norma i = f i - z * i z nad i - z * i (6)

1 2 max max z * 2 z * z nad z * 1 w z ** 2 (f, f) f 1 F Realizovatelný prostor

Vztah dominance

Definice Říká se, že řešení x_1 dominuje jinému řešení x_2, a my napište $x_1 \leq x_2$, pokud jsou splněny obě následující podmínky: 1 Řešení x_1 není u všech cílů o nic horší než x_2. 2 Řešení x_1 je přísně lepší než x_2 alespoň v jednom objektivní.

$$x_1 \leq x_2 ifffi(x_1) \leq fi(x_2) \forall i \in 1, ..., M \exists j \in 1, ..., M fj(x_1) < f_j(x_2)$$

je-li některá z výše uvedených podmínek porušena, řešení x_1 ano ne dominovat řešení x_2.

Strana 18 Vztah dominance Příklad

Strana 19 Vztah dominance Vlastnosti R EFLEXIVNÍ Vztah dominance není reflexivní, protože jakékoli řešení x dominuje sám (podle definice dominance). S YMETRICKÉ Vztah dominance není symetrický, protože $x \leq y$ neznamená $y \leq x$. Ve skutečnosti je opak pravdou, pokud $x \leq y$ pak $y \nleq x$ NTISYMMETRIC Protože vztah dominance není symetrický, nemůže být také antisymetrické. T PŘECHODNÝ Vztah dominance je přechodný. Pokud $x \leq y$ a $y \leq z$ než $x \leq z$.

Vztah dominance, Přechodnost

$$x \preceq y iff fi(x) \leq fi(y) \forall i \in 1, ..., M \exists j \in 1, ..., M fj(x) < fj(y)$$

$$y \preceq z iff fi(y) \leq fi(z) \forall i \in 1, ..., M \exists k \in 1, ..., M fk(y) < fk(z)$$

$$x \preceq z fi(x) \leq fi(y) \leq fi(z) \forall i \in 1, ..., M \exists l \in 1, ..., M fl(x) < fl(z) pokud k = j, pak fj(x) < fj(y)$$

Stránka 21 Vztah dominance Více vlastností Další zajímavou vlastností je, že pokud řešení x ne ovládnout řešení y , to neznamená, že y dominuje x (například mohou být oba nedominovaní). Vztah dominance se kvalifikuje jako vztah objednávání, protože je přinejmenším tranzitivní. Protože vztah dominance není reflexivní, je přísný částečná objednávka. Obecně platí, že pokud je vztah reflexivní, antisymetrický a tranzitivní, nazývá se to relací částečného řádu. Nicméně dominance vztah není reflexivní a není antisymetrický, takže vztah dominance není vztahem dílčího řádu v obecný smysl.

Stránka 22 Sada bez dominance Pro danou sadu řešení můžeme provést vše možné párová srovnání a zjistit, které řešení dominuje kterým a kterým řešením nedojde k úctě navzájem. Tato sada má tu vlastnost, že dominuje všem řešením které do sady nepatří. Definice (dominovaná množina) Mezi sadou řešení P je nedominovaná sada řešení P jsou ty, kterým nedominuje žádný člen sady P.

Stránka 23 Globálně a místně Pareto-optimální sady Stejně jako existují globální a místní optimální řešení v případě jednocílovou optimalizaci můžeme definovat globální a lokální Paretooptimální sady. Když je množina P celý vyhledávací prostor (P = S), pak výsledná dominantní množina P se nazývá Pareto-optimální množina. Definice (globálně Pareto-optimální sada) Neovládaná množina celého proveditelného vyhledávacího prostoru S je celosvětově Pareto-optimální sada. Definice (místně Pareto-optimální sada) Pokud je pro každý člen x v množiny P, neexistuje řešení y v sousedství x , $\|y - x\| \leq \varepsilon$, dominující kterémukoli členu množina P, pak P představuje lokálně Pareto-optimální množinu.

Globálně a místně Pareto-optimální sady

Lokálně Pareto - optimální množina Globálně Pareto - optimální sada

Strana 25 Silná dominance a slabá Pareto-optimálnost Předchozí definice dominance se obvykle označuje jako slabý vztah dominance. Silná verze je definována jako následovat: Definice (silná dominance) Řešení x silně dominuje řešení y , $x \prec y$, pokud je řešení x je ve všech M. cílech přísně lepší než řešení y . Je zřejmé, že pokud $x \prec y$ než $x \leq y$, ale naopak neplatí. Definice (Slabě nedominovaná množina) Mezi souborem řešení P je slabě nedominovaný soubor řešení P jsou ta, která nijak silně nedominují další člen množiny P. Máme to $|P| \geq |P|$.

Motivace

Jak najdeme dominovanou množinu v daném populace řešení? Vzhledem k tomu, že může být vyžadováno, aby dominovala sada identifikovány v každé iteraci optimalizace s více cíli algoritmus nás zajímá výpočetně efektivní postupy. Budeme zde diskutovat o třech postupech, počínaje jedním to je naivní a pomalé na efektivní a rychlé.

Strana 27 Přístup 1 Naivní a pomalý Sada bez dominance (V. 1) Pojďme definovat složitost zde jako celkový počet vyhodnocení funkcí. vnitřní smyčka while vyžaduje O (N) srovnání pro nadvláda a každý srovnání vyžaduje funkci M. srovnání hodnot. Takže my mají celkovou složitost O (MN). vnější smyčka vyžaduje O (N) srovnání také, takže my mají celkovou složitost O (MN 2).

Stránka 28 Přístup 2 Průběžně aktualizováno Sada bez dominance (V. 2) x_2 ve srovnání s x_1 x 3 ve srovnání maximálně s x_1 , x_2 a tak dále... To vyžaduje v nejhorším případě: 1 + 2 + ··· + (N - 1) = N (N - 1) / 2 kontroly nadvlády. Přestože celková složitost je stále O (MN 2), tato metoda vyžaduje obvykle polovina toho, co vyžaduje přístup 1.

Stránka 29 Přístup 3 Efektivní metoda Kung et al. (1975) Přední (P) Podrobnosti o složitosti výpočet lze nalézt v: Kung a kol. [2] .

Strana 30 Nedominované třídění populace Třídění bez dominance Některé algoritmy vyžadují populace, které mají být klasifikovány do několik úrovní nedominace. Složitost? Součet jednotlivé složitosti identifikace každé dominantní sady. $|P|$ klesá po každém výpočet nedominované množiny Z praktického hlediska složitost se řídí postupem pro identifikace prvního, kde nedominují soubor.

Stránka 31 Procedura třídění bez dominance O (MN 2) Třídění bez dominance Pro každé řešení vypočítáme dva subjekty: počet nadvlády n i : počet řešení, která dominují x i . S i : soubor řešení, která řešení dominuje. Složitost je O (MN 2): O (MN 2) pro výpočet n i a S i O (N 2) pro výpočet všech front P k , k = 1, 2, ... (nedominace úrovně). Upozorňujeme, že každé řešení bude navštíveno maximálně N - 1krát než se jeho počet ovládnutí stane nulovým a nikdy nebude navštívil znovu. Takových řešení je maximálně N - 1. I když je časová složitost úložiště sníženo na O (MN 2) byla zvýšena na O (N 2).

Strana 35 Pro další čtení Kalyanmoy Deb Multi-objektivní optimalizace pomocí evolučního Algoritmy. John Wiley & Sons, Inc, New York, NY, USA, 2001.

Kung, HT, Luccio, F. a Preparata, FP 1975. O hledání maxima sady vektorů. J. ACM 22, 4 (říjen 1975), 469-476.