

Řízení a optimalizace

Stavové modely a model-prediktivní řízení

Matematické metody pro ITS (11MAMY)

Jan Příkryl

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

2. přednáška 11MAMY
středa 22. února 2017

verze: 2017-02-22 20:11



Obsah přednášky

① Vnější popis systému

Opakování

② Vnitřní popis systému

③ Příklady na stavový popis dynamických systémů

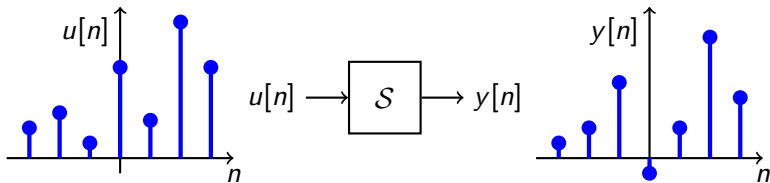
④ Úrovně modelování

⑤ Základy teorie řízení

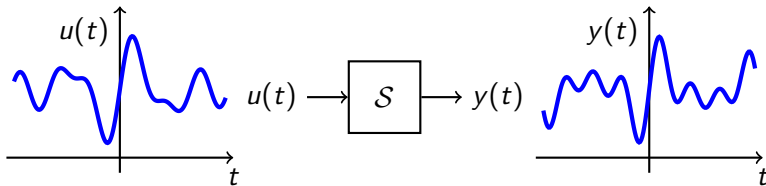
⑥ Model-prediktivní řízení



Vnější popis diskrétního systému



Vnější popis spojitého systému



Obsah přednášky

① Vnější popis systému

② Vnitřní popis systému

Vnitřní popis nelineárního systému

Vnitřní popis lineárního systému

③ Příklady na stavový popis dynamických systémů

④ Úrovně modelování

⑤ Základy teorie řízení

⑥ Model-prediktivní řízení



Vnitřní popis systému

Nelineární systém

Spojité systém	Diskrétní systém
vstup $\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{u}[n]$
stav $\mathbf{x}(t)$	$\mathbf{x}[n]$
výstup $\mathbf{y}(t)$	$\mathbf{y}[n]$
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	$\mathbf{y}[n] = \mathbf{g}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$



Vnitřní popis systému

Lineární nestacionární systém

Spojitéý systém

$\mathbf{u}(t)$... vstup

$\mathbf{x}(t)$... stav

$\mathbf{y}(t)$... výstup

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t)$$

Diskrétní systém

$\mathbf{u}[n]$

$\mathbf{x}[n]$

$\mathbf{y}[n]$

$$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}[n] \mathbf{x}[n] + \mathbf{N}[n] \mathbf{u}[n]$$

$$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n] \mathbf{x}[n] + \mathbf{D}[n] \mathbf{u}[n]$$



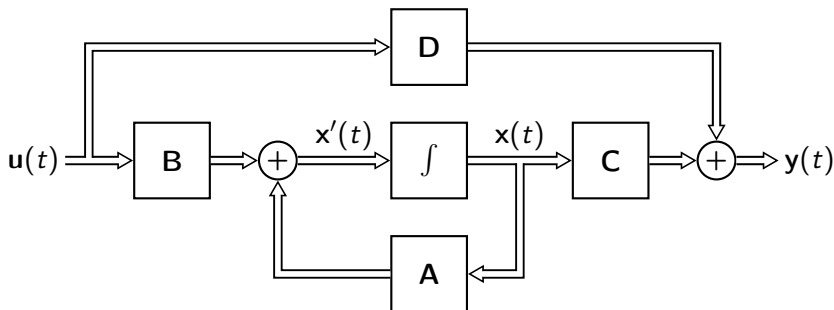
Vnitřní popis systému

Stacionární (LTI) systém

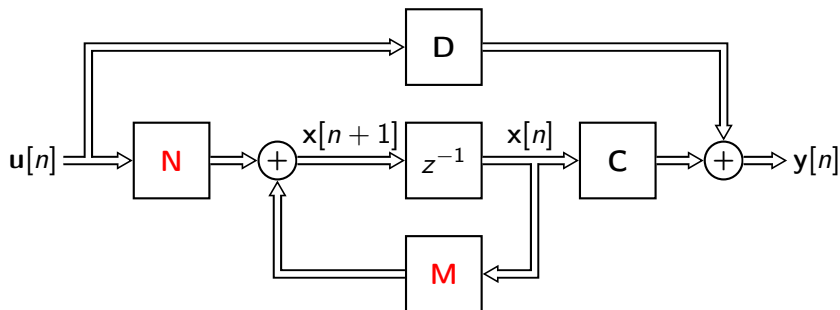
Spojitéjší systém	Diskrétní systém
$\mathbf{u}(t)$... vstupní (řídící) vektor	$\mathbf{u}[n]$... vstupní (řídící) vektor
$\mathbf{x}(t)$... stavový vektor	$\mathbf{x}[n]$... stavový vektor
$\mathbf{y}(t)$... výstupní vektor	$\mathbf{y}[n]$... výstupní vektor
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\mathbf{u}[n]$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\mathbf{u}[n]$
\mathbf{A} je matice systému ($n \times n$)	\mathbf{M} je matice systému ($n \times n$)
\mathbf{B} je matice vstupů (řízení) ($n \times r$)	\mathbf{N} je matice vstupů (řízení) ($n \times r$)
\mathbf{C} je výstupní matice ($m \times n$)	\mathbf{C} je výstupní matice ($m \times n$)
\mathbf{D} je výstupní matice ($m \times r$)	\mathbf{D} je výstupní matice ($m \times r$)



Vnitřní popis spojitého systému



Vnitřní popis diskrétního systému



Obsah přednášky

- 1 Vnější popis systému
- 2 Vnitřní popis systému
- 3 Příklady na stavový popis dynamických systémů**
 - Cykloida
 - Modely typu predátor-kořist
- 4 Úrovně modelování
- 5 Základy teorie řízení
- 6 Model-prediktivní řízení



Cykloida

Pohyb po **cykloidě** je popsán parametrickou soustavou rovnic

$$x = x_1(t) = a t - d \sin t,$$

$$y = x_2(t) = a - d \cos t,$$

která je pro počáteční podmínky

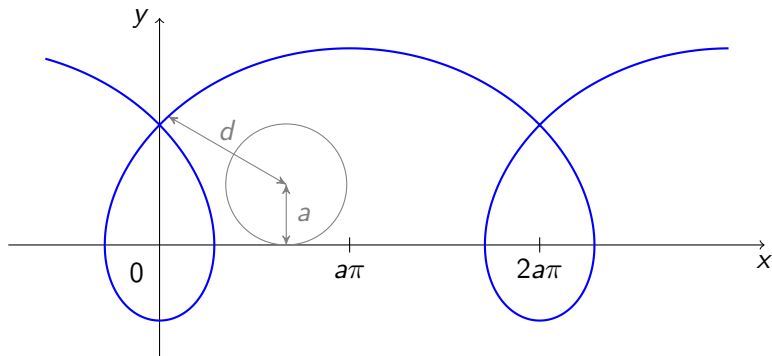
$$x_1(0) = 0 \quad \text{a} \quad x_2(0) = a - d$$

dána řešením stavové rovnice

$$\frac{d}{dt} x \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} t.$$



Obrázek cykloidy



Vlci a ovečky

Nelineární stavový model **vlci a ovečky**, který je znám v literatuře jako *Lotka-Volterra predator-prey model*, se týká populace ovčí popsané stavovou proměnnou $x_1(t)$ a populace vlků popsané stavovou proměnnou $x_2(t)$.

Dynamický model je dán nelineární soustavou stavových rovnic

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t) &= a x_1(t) - b x_1(t)x_2(t), \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -c x_2(t) + d x_1(t)x_2(t).\end{aligned}$$



Vlci a ovečky

Interpretace modelu

Uvedený model můžeme snadno interpretovat. Žijí-li ovce a vlci odděleně, pro ovce platí rovnice

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a x_1(t),$$

jejímž řešením je exponenciální růst

$$x_1(t) = x_1(0) e^{at},$$

zatímco bez potravy je přírůstek populace vlků záporný

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = -c x_2(t)$$

a vlci hynou,

$$x_2(t) = x_2(0) e^{-ct}.$$



Vnitřní popis nelineárního spojitého systému

Vlci a ovečky

Počet sežraných ovcí a nasycených vlků je úměrný počtu jejich setkání – ten je dán součinem

$$x_1(t)x_2(t)$$

a počet ovcí klesá úměrně s

$$-b x_1(t)x_2(t)$$

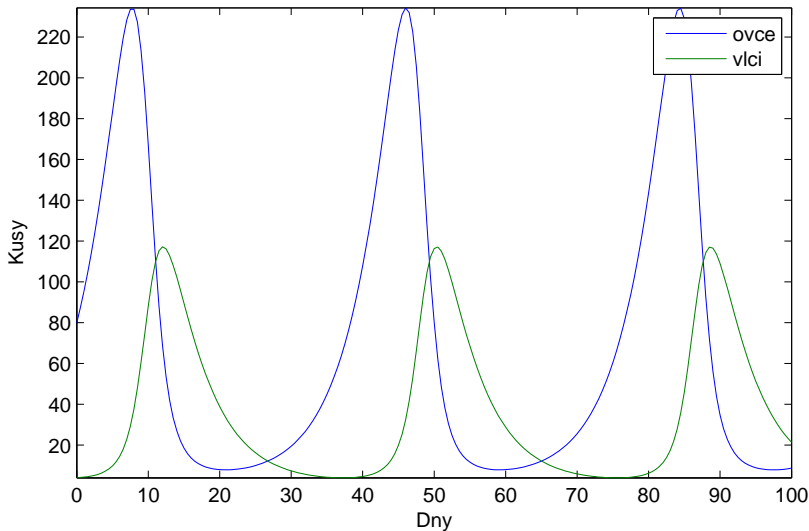
zatímco se vlci mají dobře a jejich počet stoupá úměrně s

$$d x_1(t)x_2(t).$$



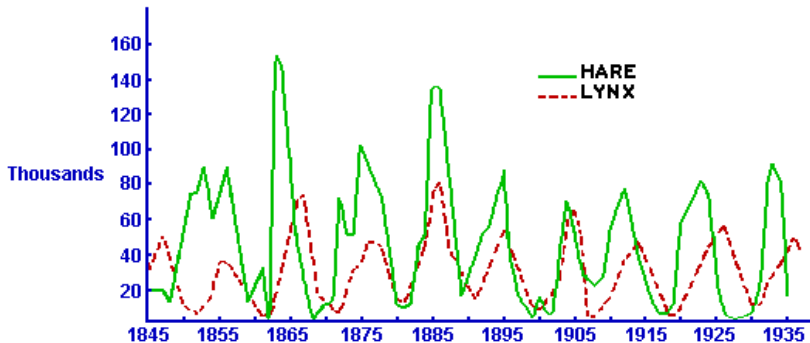
Vnitřní popis nelineárního spojitého systému

Výstup modelu



Vnitřní popis nelineárního spojitého systému

Reálná data populací rysů a sněžných zajíců v Kanadě



Obsah přednášky

- 1 Vnější popis systému
- 2 Vnitřní popis systému
- 3 Příklady na stavový popis dynamických systémů
- 4 Úrovně modelování**
 - Přesný model systému
 - Model systému z naměřených dat
 - Gray-box
- 5 Základy teorie řízení



Úrovně modelování

Typy modelů podle úrovně znalostí systému

V nějakých případech jsme schopni přesně matematicky popsat chování celého systému.

V případě složitých systémů s mnoha neurčitými vazbami to však tak jednoduché není.

Podle toho, kolik informací o modelovaném systému máme, lze modely dělit do tří skupin:

- white-box
- gray-box
- black-box



White-box

Přesný model systému

Zcela odvozeny ze základních zákonů fyziky, chemie, ekonomie, ... (first-principle models).

Všechny rovnice a parametry lze určit na teoretické úrovni.

Také kombinace modelů, i v případě, že některé parametry odhadnuty z dat.

Charakteristická vlastnost: nezávislé na datech, parametry přímo interpretovatelné jako základní veličiny (hmotnost, rychlost, národní důchod, ...).



Black-box

Modelování z dat

Zcela závislé na měřených datech.

Jak **struktura modelu**, tak i **parametry** jsou odvozeny experimentálně.

Nevyužíváme žádnou apriorní informaci o modelovaném systému.

Parametry typicky nemají žádný vztah k základním veličinám.



Black-box

Modelování z dat

Algoritmy strojového učení s učitelem: Známe vstupní a výstupní data, použijeme generický model, jehož parametry nastavíme.

Vyžaduje trénovací a testovací data

Velmi rozšířené v inženýrské praxi

Příklad: AR (autoregresní modely), ANN (neronové sítě), SVM (support vector machines), GP (Gaussovské procesy)

Dělíme na

- parametrické
- neparametrické



Black-box

Parametrické modely

Parametrické modely předpokládají existenci **konečné množiny parametrů** θ . Jakmile jednou najdeme parametry, budoucí predikce modelu x nezávisí na množině právě pozorovaných dat \mathcal{D} , je tedy

$$P(x|\theta, \mathcal{D}) = P(x|\theta).$$

Složitost modelu je ohraničená, i když množství pozorovaných dat ohraničené není.

Tyto modely nejsou flexibilní.



Black-box

Neparametrické modely

Neparametrické modely nepředpokládají, že data lze reprezentovat distribuční funkcí založenou na konečné množině parametrů. Mnohdy je ale definujeme ze předpokladu, že θ má **nekonečnou dimenzi**. Typicky je θ nějaká funkce.

V tomto případě může θ obsáhnout rostoucí objem informace o datech tak, jak \mathcal{D} roste.

Tyto modely jsou složitější, ale zato jsou flexibilní.



Black-box

Bayesovské neparametrické modely

Jednoduchý nástroj na modelování složitých vztahů v datech.

BIG DATA!

Příklady

Parametrické	Neparametrické	Aplikace
polynomiální regrese	Gaussovský proces	aproximace fcí
logistická regrese	GP klasifikátor	klasifikace
směšové modely, k -means	směš Dirichletovských procesů	shlukování
skryté Markovské modely	nekonečné HMM	časové řady
faktorová analýza, PCA, PMF	nekonečné latentní FM	hledání příznaků



Gray-box

Některé neznámé části

Kompromis / kominace mezi white-box a black-box modelem.
Možné jsou všechny možné kombinace.

Jeho popis může obsahovat také kvalitativní informace
o modelovaném systému, např. popis chování systému ve formě
pravidel.

Charakteristika: slučuje všechny možné snadno dostupné zdroje
informací o systému.

Struktura modelu bývá odvozena z expertních znalostí,
parametry modelu jsou ale určeny z dat.



White-box

Přesný model systému

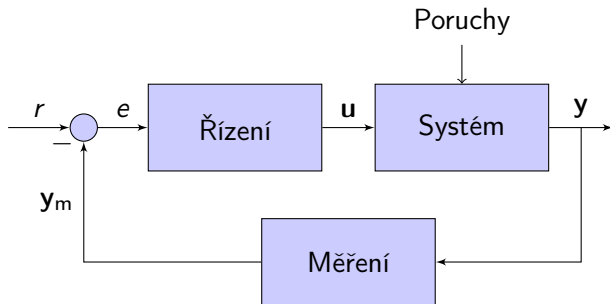
	White-box	Gray-box	Black-box
Zdroje informací	základní principy znalosti	kvalitativní znalosti pravidla částečné znalosti a data	experimenty data
Vlastnosti	dobrá extrapolace dobré pochopení vysoká spolehlivost škálovatelnost		krátká doba vývoje nevyžaduje expertní znalosti lze i pro neznámé procesy
Nevýhody	časově náročné vyžaduje znalosti znalosti omezují přesnost pouze pro známé procesy		nelze extrapolovat není škálovatelné přesnost omezena daty málo pochopení
Aplikační oblasti	plánování konstrukce, design spíše jednoduché procesy		pouze pro existující procesy spíše složité procesy



Obsah přednášky

- 1 Vnější popis systému
- 2 Vnitřní popis systému
- 3 Příklady na stavový popis dynamických systémů
- 4 Úrovně modelování
- 5 Základy teorie řízení**
- 6 Model-prediktivní řízení





Řízení systémů

Požadavky kladené na řízení

- Kompenzace vlivu poruchových veličin (angl. *Disturbance Rejection*)
- Problém regulátoru (angl. *Regulator Problem*)
- Problém sledování (angl. *Tracking Problem*)
- Optimální řízení (angl. *Optimal Control*)



Řízení systémů

Kompenzace vlivu poruchových veličin

Na systém vždy působí celá řada poruchových veličin.

Poruchová veličina měřitelná \rightarrow její vliv lze kompenzovat v řídicím členu. Někdy lze vliv poruchy kompenzovat beze zbytku.

Řízený systém je invariantní vzhledem k poruše: porucha se na výstupu systému vůbec neprojeví.



Řízení systémů

Problém regulátoru

Dynamické vlastnosti samotného systému jsou někdy nevyhovující
Účelem je navrhnout takovou strukturu řízení, aby celý systém měl
vyhovující dynamické vlastnosti.
Často chceme tímto způsobem systém **stabilizovat**.



Řízení systémů

Problém sledování

Požadujeme, aby $y(t)$ co nejlépe sledovalo referenční průběh $w(t)$.

Minimalizace regulační odchylky $e(t)$

$$e = w(t) - y(t)$$

Dodatečná omezení:

- velikost řídicí veličiny
- velikost celkové řídicí energie



Řízení systémů

Optimální řízení

V moderní teorii řízení jsou všechny požadavky na řízení shrnuty do kritéria kvality řízení.

Problém řízení → optimalizační problém minimalizace kritéria kvality řízení.

Dva zásadní problémy:

- volba kritéria kvality řízení
- řešitelnost takto formulovaného optimalizačního problému

Nejvíce používaným kritériem kvality řízení je kvadratické kritérium, které pro lineární systémy vede na lineární zákon řízení.



Základní typy řízení

Ovládání a regulace



Bellmanova funkce

Základ dynamického programování

Optimalizace: Snaha dosáhnout určitého cíle (minimalizace nákladů, maximalizace výdělku, minimalizace cestovní doby)

Definice (Bellmanův princip optimality)

Optimální řízení má tuto vlastnost: Vzhledem ke stavu, který je důsledkem prvního rozhodnutí, představují zbývající rozhodnutí opět optimální řízení.



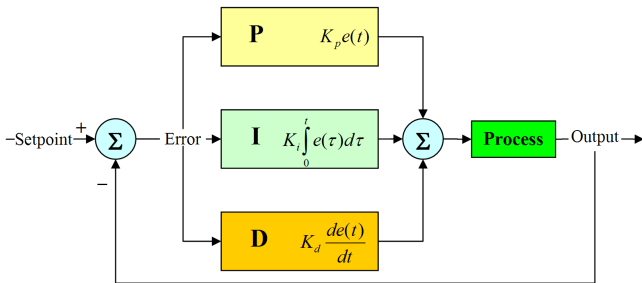
Pozorovatelnost, říditelnost



PID řízení

Proporcionální, integrální a derivační složka

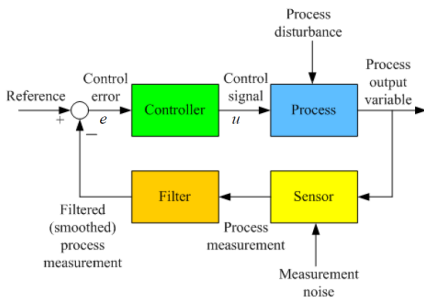
$$u(t) = u_0 + \underbrace{K_p e(t)}_{u_p} + \underbrace{\frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau}_{u_i} + \underbrace{K_p T_d \frac{d}{dt} e(t)}_{u_d}$$



PID řízení

Proporcionální, integrální a derivační složka

$$u(t) = u_0 + \underbrace{K_p e(t)}_{u_p} + \underbrace{\frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau}_{u_i} + \underbrace{K_p T_d \frac{d}{dt} e(t)}_{u_d}$$



Obsah přednášky

- 1 Vnější popis systému
- 2 Vnitřní popis systému
- 3 Příklady na stavový popis dynamických systémů
- 4 Úrovně modelování
- 5 Základy teorie řízení
- 6 Model-prediktivní řízení**



Model-prediktivní řízení

Prediktivní řízení založené na modelu

Idea: Použijeme model systému k posouzení budoucích dopadů současných akcí.

- dnes velmi rozvinuté regulační paradigma
- základ: 1970tá léta, Shell Oil, petrochemie
- důvod: úspora nákladů, lze se více přiblížit mezním parametrům



Model-prediktivní řízení

Princip

V každém okamžiku vzorkování k používáme

- 1 matematický model řízené soustavy
dynamický model, omezující podmínky
- 2 (konečnou) historii hodnot regulovaných veličin až po k -tou
- 3 (konečnou) historii hodnot řízení
- 4 požadovaný průběh regulovaných veličin
v rámci uvažovaného horizontu predikce h



Model-prediktivní řízení

Trochu matematiky

Máme:

- *stavový vektor* v kroku k , $\mathbf{x}[k]$,
- *diskrétní model*
$$\begin{cases} \mathbf{x}[k + 1] = f(k, \mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k]) \\ \mathbf{y}[k] = g(k, \mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k]) \end{cases}$$

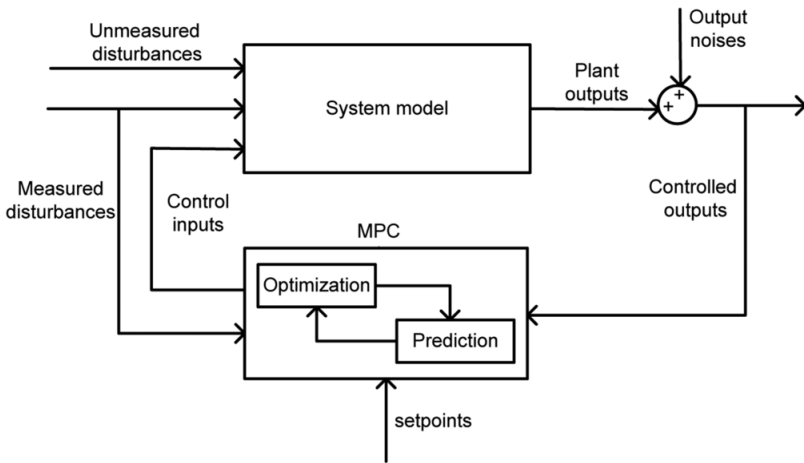
Vektor vstupů $\mathbf{u}[k]$ minimalizuje **ztrátovou funkci** $J(\mathbf{x}[k])$

- jednokroková minimalizace $J(\mathbf{x}[k])$ není globálně optimální
- použijeme model systému pro h -krokovou predikci $\mathbf{x}[k + 1], \dots, \mathbf{x}[k + h]$
- rozšíříme $\mathbf{x}[k]$ na $\mathbf{x}[h|k] = [\mathbf{x}[k]; \mathbf{x}[k + 1]; \dots; \mathbf{x}[k + h]]$
- počítáme $J(\mathbf{x}[h|k])$ pro h kroků



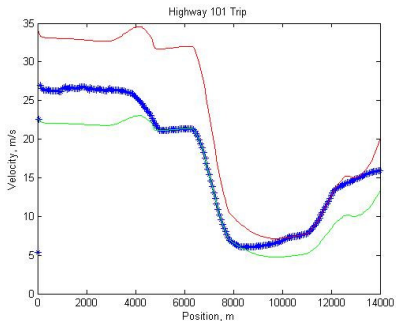
Model-prediktivní řízení

Neúplné blokové schéma



Model-prediktivní řízení

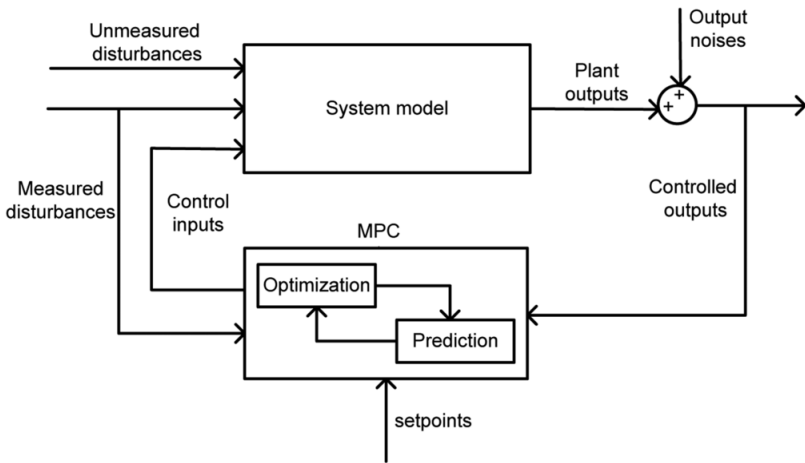
Audi Smart Engine



- Návrh MPC řadiče nad ACC, regulujícího požadovanou rychlost tak, aby vozidlo jelo co nej Hospodárněji
- Predikce: maximální + minimální rychlost dopravy, sklon
- Omezení: maximální + minimální rychlost dopravy a vozidla

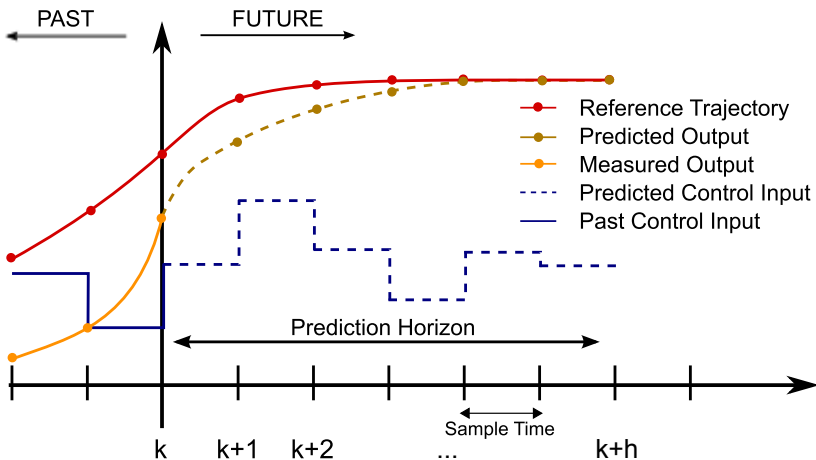
Model-prediktivní řízení

Neúplné blokové schéma



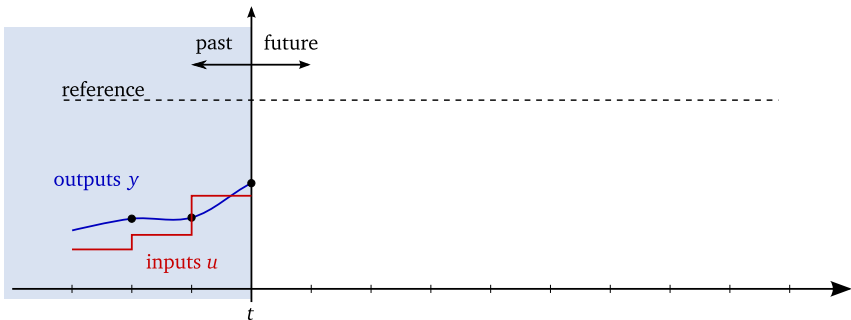
Model-prediktivní řízení

Průběh vstupů



Model-prediktivní řízení

Jeden krok

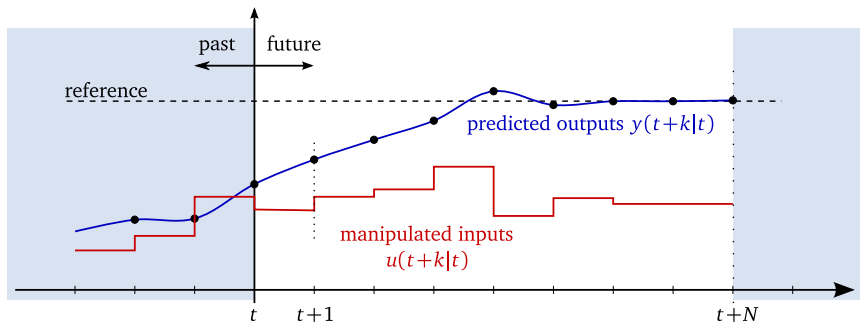


- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t + 1$
- Optimalizace používá současná měření → zpětná vazba



Model-prediktivní řízení

Jeden krok

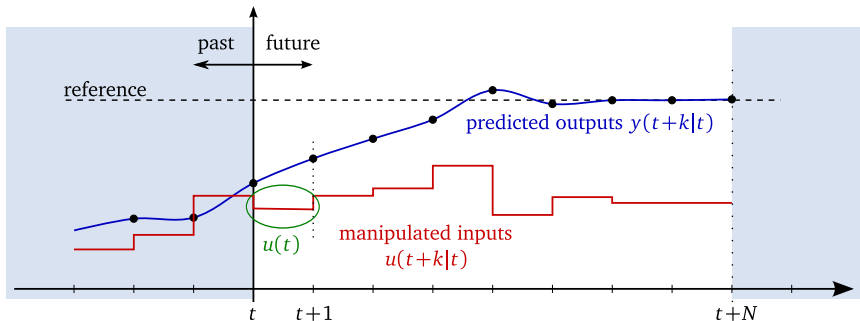


- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t + 1$
- Optimalizace používá současná měření → zpětná vazba



Model-prediktivní řízení

Jeden krok

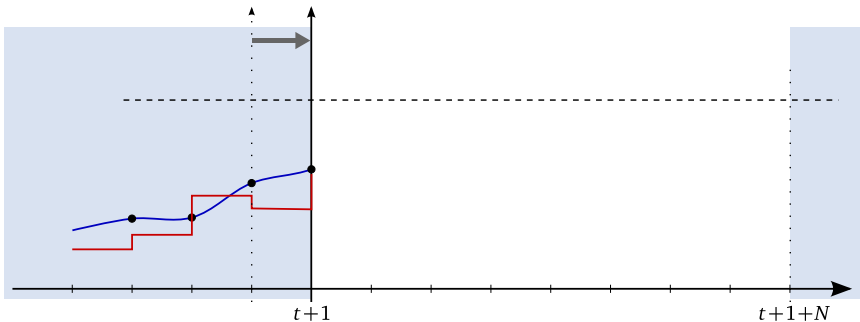


- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t + 1$
- Optimalizace používá současná měření → zpětná vazba



Model-prediktivní řízení

Jeden krok

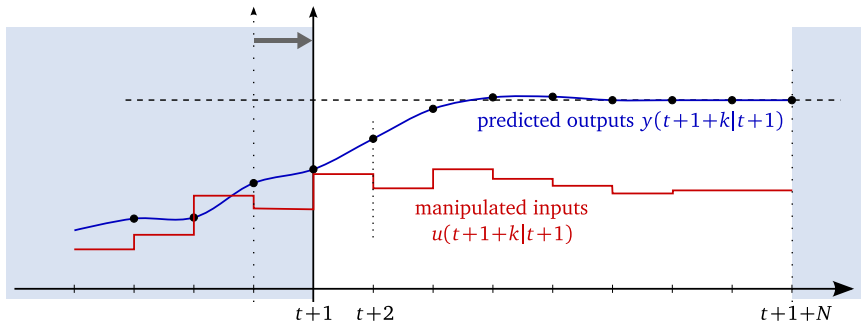


- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t + 1$
- Optimalizace používá současná měření → zpětná vazba



Model-prediktivní řízení

Jeden krok

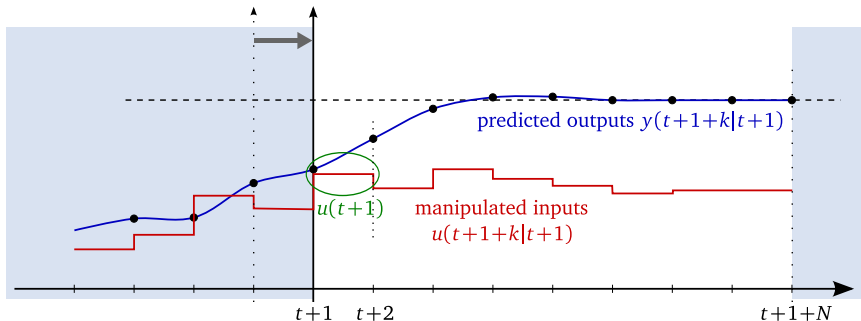


- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t + 1$
- Optimalizace používá současná měření → zpětná vazba



Model-prediktivní řízení

Jeden krok



- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t + 1$
- Optimalizace používá současná měření → **zpětná vazba**

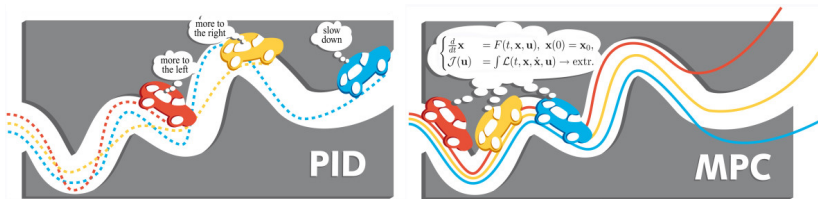


Model-prediktivní řízení

MPC versus PID

MPC reaguje na predikovanou budoucí hodnotu regulačních odchylek

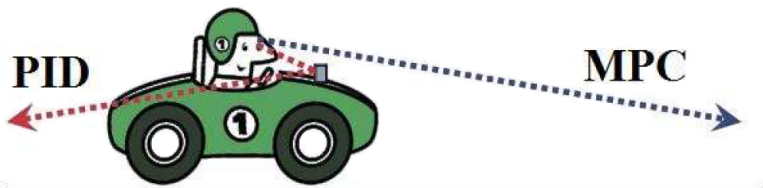
PID reaguje jen na současné a minulé hodnoty.



Model-prediktivní řízení

MPC versus PID

Používat PID je jako řídit auto na základě pohledu do zpětného zrcátka (Hlava, 2007).



Model-prediktivní řízení

Nejdůležitější typy omezujících podmínek

Omezení hodnot akčních veličin:

$$u_{\min} \leq u[k + p|k] \leq u_{\max}, \quad p = 0, 1, \dots, h$$

Omezení hodnot přírůstků akčních veličin:

$$|\Delta u[k + p|k]| \leq \Delta u_{\max}, \quad p = 0, 1, \dots, h$$

Omezení hodnot regulovaných veličin:

$$y_{\min} \leq y[k + p|k] \leq y_{\max}, \quad p = h, n + 1, \dots, N$$

- mohou být obecně také proměnná v čase,
- u regulovaných veličin → **± prázdná množina přípustných řešení**



Na závěr



Děkuji za pozornost. Až budete utíkat, prosím opatrně.

