Úvodní informace
Matematické modelování

Matematické metody pro ITS (11MAMY)

Jan Přikryl, Bohumil Kovář

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

1. přednáška 11MAMY
úterý 27. února 2018

verze: 2018-02-26 22:40

Obsah přednášky

Základní informace

Přednášející:

- Dr. Ing. Jan Přikryl (prikryl@fd.cvut.cz)
  přednášky nepravidelně blokově, út–čt 9:45–14:45, K404 (Konvikt)

Cvičící:

- Dr. Ing. Jan Přikryl (prikryl@fd.cvut.cz)
  cvičení nepravidelně blokově, út–čt 9:45–14:45 B102 (Horská)

Garant předmětu:

- prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc. (vlcek@fd.cvut.cz)

Základní informace
Pokračování

Domovská stránka předmětu 11MAMY:
`http://zolotarev.fd.cvut.cz/mamy/`

Cvičení: Pravidla jsou na stránkách předmětu.

Cvičení pro druhý zápis: Zatím naštěstí nemáme.

Literatura I

1. VELTEN, Kai. *Mathematical modeling and simulation: introduction for scientists and engineers*. John Wiley & Sons, 2009.
2. OGATA, Katsuhiko. *Modern control engineering*. Prentice Hall PTR, 2001.
3. OPPENHEIM, Alan V., Alan S. WILLSKY a Syed Hamid NAWAB. *Signals and Systems*. 2. vyd. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1997, 957 s. ISBN 01-381-4757-4.
4. JAMES, Gareth, et al. *An introduction to statistical learning*. New York: Springer, 2013.
5. DANGELMAYR, Gerhard a KIRBY, Michael. *Mathematical Modeling – A Comprehensive Introduction*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2005.

Literatura II

6. HEATH, Michael T. *Scientific computing – An Introductory Survey*. 2. vyd. New York: McGraw-Hill, 2002.
7. BERTSEKAS, Dimitri P. *Dynamic programming and optimal control*. Belmont, MA: Athena Scientific, 1995.
8. KARBAN, Pavel. *Výpočty a simulace v programech Matlab a Simulink*. Brno: Computer Press, 2006.
9. Informace o prostředí MATLAB
   `http://zolotarev.fd.cvut.cz/mni/`
   `http://zolotarev.fd.cvut.cz/msp/`
   `http://www.fd.cvut.cz/personal/nagyivan/PrpStat/Prp/MatIntro.pdf`
10. Matematika-opakování
   `http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml1/`

Zápočet a zkouška

Celkový počet bodů, které lze získat, je 40. Počet bodů, které studenti mohou získat ze semestru, je 20. Zkouška sestává z písemného testu (20 bodů).

Zápočet udělujeme od 10 bodů ze semestru výše za předpokladu, že studentu uspěje v úvodním testu.

Body jsou rozděleny následovně:

- 10 bodů za implementaci jednoduchého modelu z oblasti ITS,
- 10 bodů za aktivitu v semestru.

Semestrální projekt je skupinový – skupiny po třech studentech.

Znalosti vstupní

Toto jsou znalosti, u nichž předpokládáme, že je ovládáte. Jejich neznalost se neomlouvá.

1. Znalost základních pojmů a operací s vektory a maticemi
2. Znalost práce s komplexními čísly a základů funkcí komplexní proměnné
3. Znalost vlastností trigonometrických, hyperbolických, exponenciálních funkcí
4. Znalost výpočtu součtů nekonečné řady, derivace a integrálů funkce jedné proměnné
5. Znalost práce se zlomky, algebraickými výrazy a běžné středoškolské matematiky
6. Základní znalosti prostředí SCILAB/MATLAB (v rozsahu předmětů 11PT a 11STS)

Znalosti výstupní

1. Znalost základních principů matematického modelování a matematické teorie řízení
2. Základní znalosti o typech modelů a jejich užití
3. Základní znalosti o měření a předzpracování dat
4. Povědomí o lineární optimalizaci, multikriteriální oprimalizaci a dynamickém programování
5. Znalost modelování časových řad
6. Znalost prostředí MATLAB/SIMULINK pro modelování dynamických systémů a řešení soustav nelineárních diferenciálních a diferenčních rovnic

Obsah přednášky

Matematické modelování systémů

Co je to vlastně?

Modely popisují naše přesvědčení o tom, jak svět funguje.

Provázejí nás od nepaměti:

- obyčejná mapa je dvourozměrný model pohledu na krajinu,
- modely plánovaných budov ze sádry a dřeva.

Většinou jde o zjednodušení reality: postihují jen to, co nás pro studium daného problému opravdu zajímá. Pro nás nepodstatné detaily model zanedbává.

Matematické modelování systémů
Role matematiky

V matematickém modelování naše přesvědčení o fungování světa překládáme do jazyka matematiky.

Má to řadu výhod:

1. Matematika je *velmi přesný jazyk.*
2. Matematika je *výstižný jazyk s dobře definovanými pravidly* pro manipulaci s výrazy.
3. Všechny dřívější výsledky *jsou nám k dispozici* a můžeme je pro náš model využít.
4. K provedení numerických výpočtů *můžeme dnes použít počítače.*

Matematické modelování systémů

Nutné kompromisy

Značnou část matematického modelování tvoří kompromisy.

Většina reálných systémů je příliš složitá.

Kompromis #1: Snaha *identifikovat nejdůležitější části systému* – ty budou do modelu zahrnuty, zbytek bude zanedbán.

Matematicky lze v naprosté obecnosti dokázat mnoho, ale použitelnost výsledků závisí kriticky na formě použitých rovnic. K jejich vyčíslení používáme *počítače*, a ty *nejsou nikdy zcela přesné*.

Kompromis #2: Použijeme-li k manipulaci s rovnicemi vytvářeného modelu počítač, nemusí to sice vést k elegantním výsledkům, ale je to mnohem odolnější vůči změnám.

Matematické modelování

Cíle

1. *Rozvoj vědeckého poznání* – prostřednictvím kvantitativního vyjádření současných znalostí o systému (stejně jako znázornit to, co víme, můžeme také ukázat, co nevíme);
2. *Testování* vlivu změn v systému
3. Získat *informace pro podporu rozhodování*, včetně
    1. taktických rozhodnutí manažerů
    2. strategických rozhodnutí plánovačů

Modely

Klasifikace modelů

Deterministické $\times$ stochastické

Mechanistické $\times$ smpirické

molekuly $\longrightarrow$ buňky $\longrightarrow$ orgány $\longrightarrow$ jedinec $\longrightarrow$ stádo

$\boxed{\text{Nízká}} \longrightarrow \boxed{\text{Vysoká}}$

Klasifikace modelů

	Empirický	**Mechanistický**
Deterministický	Předpověď růstu dobytka z *regresní závislosti* na konzumaci potravy	Pohyb planet založený na Newtonovské mechanice, popsané *diferenciálními rovnicemi*
Stochastický	*Analýza rozptylu* výnosů odrůd přes lokality a roky	Genetika malých populací založená na Mendelovské dědičnosti popsané *pravděpodobnostními rovnicemi*

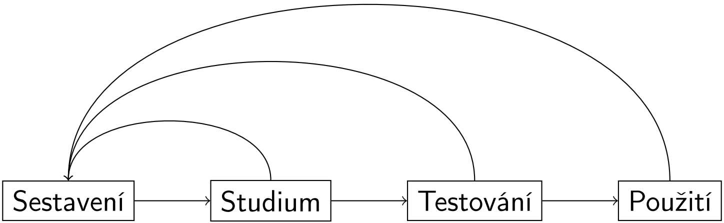
Fáze modelování

Marion, Lawson (2003)

Čtyři hlavní fáze.

Modelovací projekty nepostupují plynule od fáze tvorby modelu až po jeho použití.

Pokud dojde ke jakýmkoliv změnám modelu, pak se fáze studia a testování musí opakovat.



Systém

Definice (Systém)

Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

- systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,
- systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.

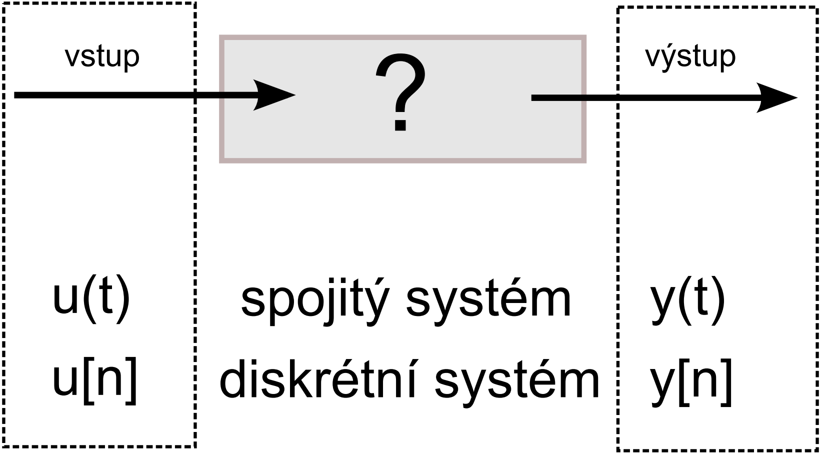
Co je modelování?

Model

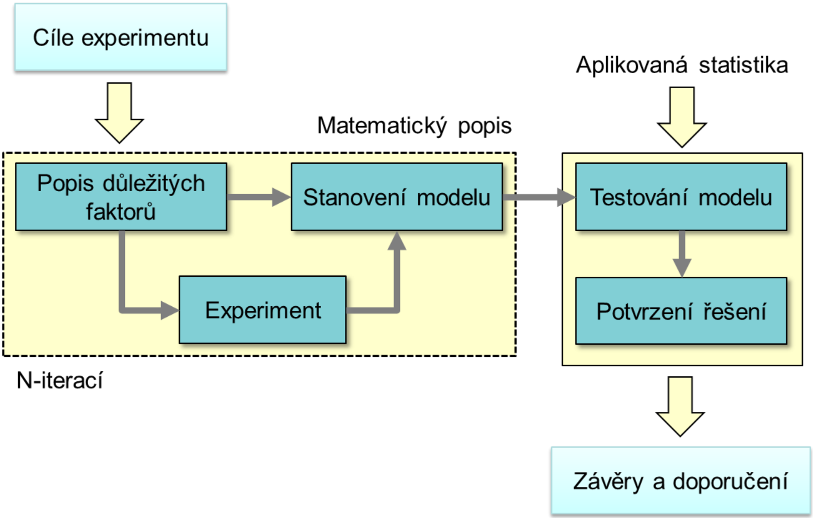
Za model můžeme pokládat náhradu nebo zjednodušení **skutečného objektu reálného světa** z hlediska jeho vlastností a funkčnosti.

Modelování je možné pouze pokud zavedeme **určitý stupeň** abstrakce a aproximace.

Diskrétní a spojitý model



Tvorba modelu

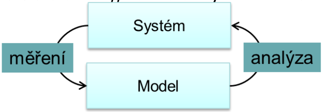


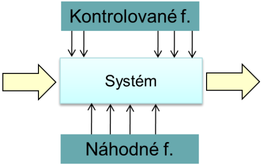
Tvorba modelu

Při analýze navrženého modelu chceme učinit co možná nejsilnější rozhodnutí na základě malého množství dat. Správnost našeho návrhu je nutné statisticky vyhodnotit.

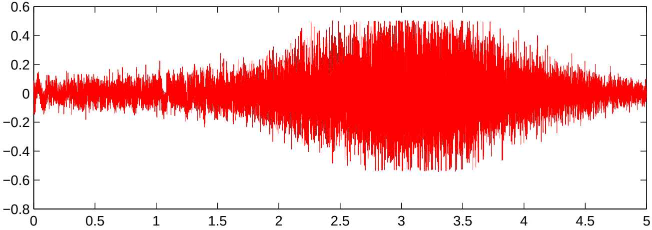
Problémy:

1. Významné diference ve sledovaných parametrech mohou být způsobeny špatným návrhem modelu, případně měřením dat
2. Je těžké rozlišit, zda diference v datech jsou skutečné nebo způsobené „náhodným vlivem“.





Svět dopravy se neobejde bez měření ...



a teď jeho zvuk zvuk auta

Proč modelování systémů?

Otázky:

- Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- Jak ověříme pevnost nového mostu?
- Jak ověříme bezpečnost softwaru zabezpečovacího zařízení?
- Jak předpovíme dopravní zácpu na dálnici?
- Jak zajistíme spolehlivou funkci navigace pří výpadku signálu GPS?

Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!

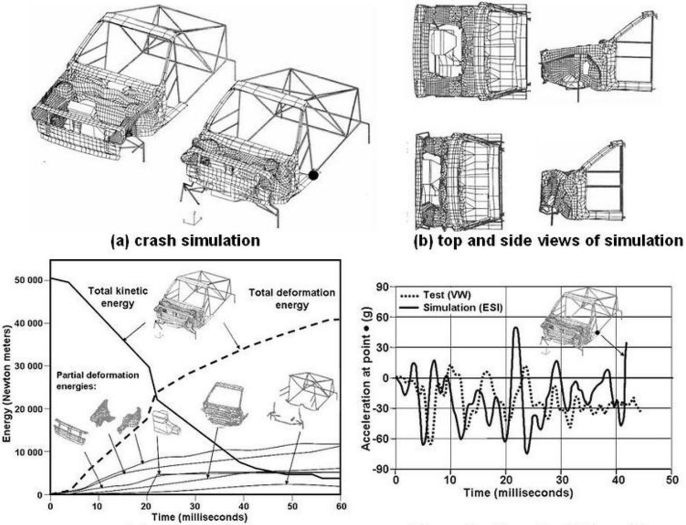
Modely reálného světa
Antoni Gaudí

Modely reálného světa

Antoni Gaudí

Modely reálného světa

VW Polo crash test



(a) crash simulation

(b) top and side views of simulation

(c) energy balance

(d) acceleration at point in cabin

Dynamické systémy
Definice

Dynamický systém má v každém okamžiku **stav**, daný množinou reálných čísel. Tento stav lze representovat jako bod ve stavovém prostoru.

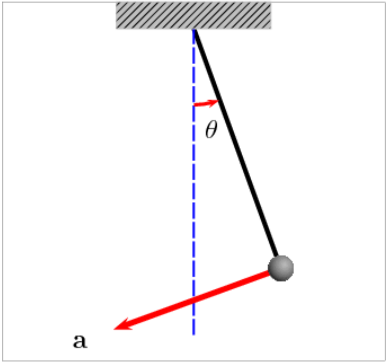
Evoluční pravidlo (rovnice vývoje stavu) popisuje přechody mezi jednotlivými stavy dynamického systému.

- většinou deterministické
- může být stochastické

V matematice a fyzice tak nazýváme **systémy citlivé na počáteční podmínky** (dvojité kyvadlo, Lorenzův atraktor)

Dynamické systémy
Příklad 1: Kyvadlo

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$

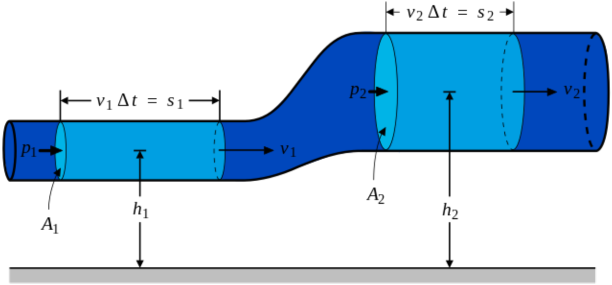


Dynamické systémy

Příklad 2: Tok kapaliny

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{\nabla p}{\rho}$$



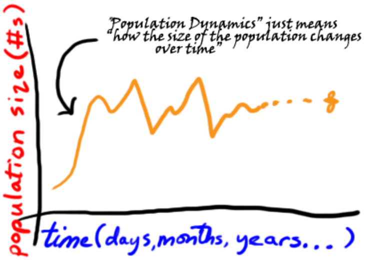
Dynamické systémy
Příklad 3: Populace

Exponenciální růst

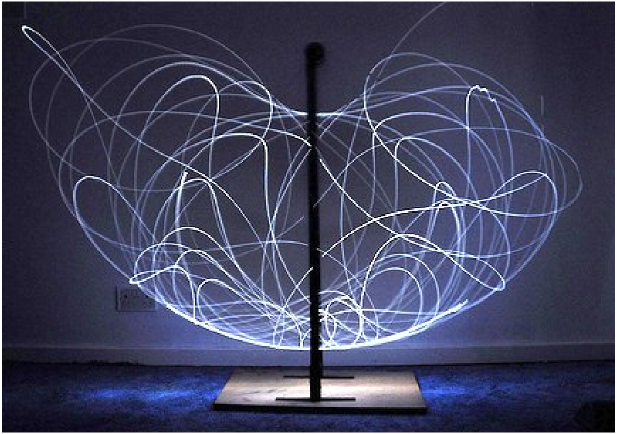
$$\dot{N} = rN$$

Logistický růst

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

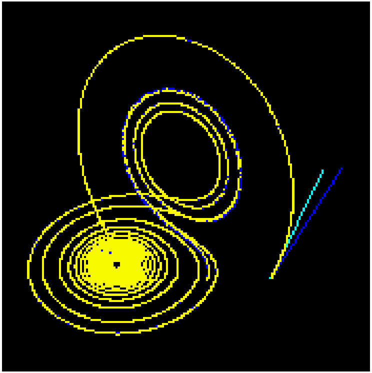


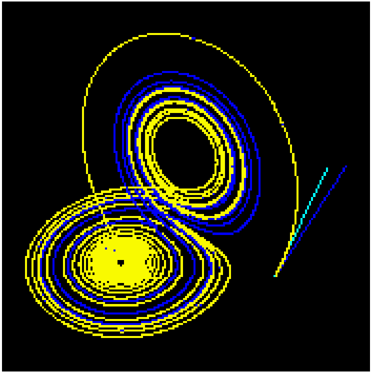
Dynamické systémy
Příklad 4: Dvojité kyvadlo



Dynamické systémy

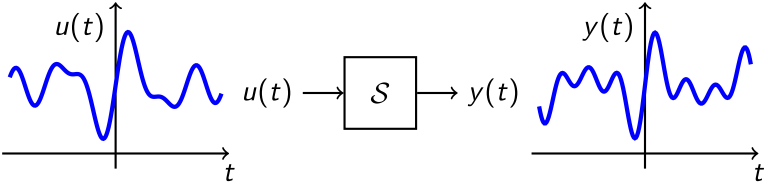
Příklad 5: Lorenzův atraktor





Vnější popis dynamických systémů

Vnější popis vychází z popisu systému vektorem vstupu $\mathbf{u}$ a vektorem výstupu $\mathbf{y}$.



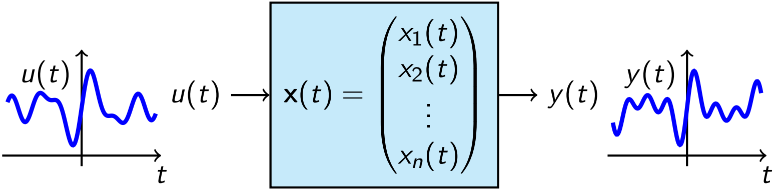
Systém tak chápeme jako černou skříňku, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat její reakci na vnější události (signály, data).

Vnější model popisujeme diferenciální rovnicí pro systémy se spojitým časem a diferenční rovnicí pro systémy s diskrétním časem. Uvedená rovnice je obecně vyššího řádu, než 1.

Vnitřní popis synamických systémů

Vnitřní, tzv. **stavový popis** systému používá k popisu dynamiky systému vektor **vnitřních stavů x**.

Vektor vstupů **u** a vektor výstupních veličin **y** jsou druhotné veličiny vnitřního popisu.



Stavové modely popisujeme

- soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a
- soustavou diferenčních rovnic prvého řádu pro systémy s diskrétním časem.

Role matematiky

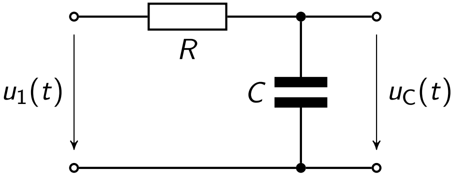
Modelování není samospasitelné:

- výstupy modelu je vždy třeba ověřovat,
- možné chyby jsou jak v modelu, tak i v jeho výpočtu.

Verifikace: Počítáme správný model.

Validace: Model počítá správně.

Příklady systémů
Integrační RC článek (1/3)



Napětí $u_1(t)$ na RC článku je součet napětí na rezistoru $u_R(t)$ a na kapacitoru $u_C(t)$:

$$u_1(t) = u_R(t) + u_C(t).$$

Příklady systémů
Integrační RC článek (2/3)

Proud procházející obvodem $i(t)$ a časový průběh napětí na rezistoru $u_\mathrm{R}(t)$ je možno vyjádřit jako

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_\mathrm{C}(t)$$

a proto

$$u_\mathrm{R}(t) = R \cdot i(t) = RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_\mathrm{C}(t).$$

Příklady systémů

Integrační RC článek (3/3)

Dosazením $u_{\mathrm{R}}(t)$ získáme diferenciální rovnici prvního řádu pro časový průběh napětí na kapacitoru $u_{\mathrm{C}}(t)$:

$$RC\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{\mathrm{C}}(t) + u_{\mathrm{C}}(t) = u_1(t).$$

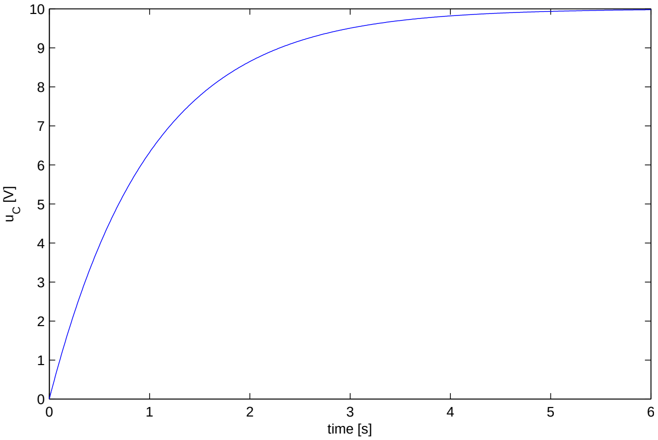
Řešení uvedené rovnice má pro všechna $t \geq 0$,

$$\alpha = \frac{1}{RC},$$
$$u_1(t) = U_0$$

a pro počáteční hodnotu $u_{\mathrm{C}}(0) = 0$ tvar

$$u_{\mathrm{C}}(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}).$$

Příklady systémů
Výstup integračního RC článku



Příklady systémů

Příklad variace ceny (1/2)

Rovnice nabídky

Nabídka dnes závisí na včerejší ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n[k] = \mathcal{C}c[k-1] + \mathcal{A}u[k].$$

Rovnice poptávky

Poptávka dnes závisí na dnešní ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$p[k] = -\mathcal{D}c[k] + \mathcal{B}u[k].$$

Příklady systémů

Příklad variace ceny (2/2)

Rovnost nabídky a poptávky

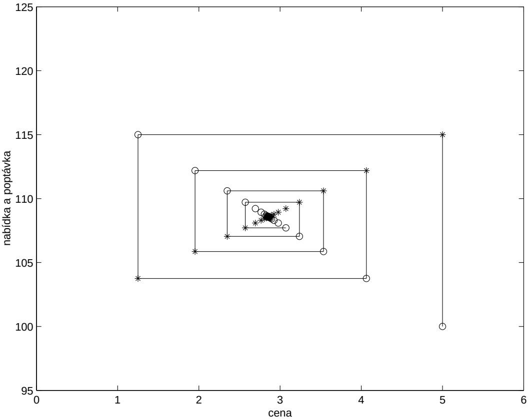
$$n[k] = p[k]$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

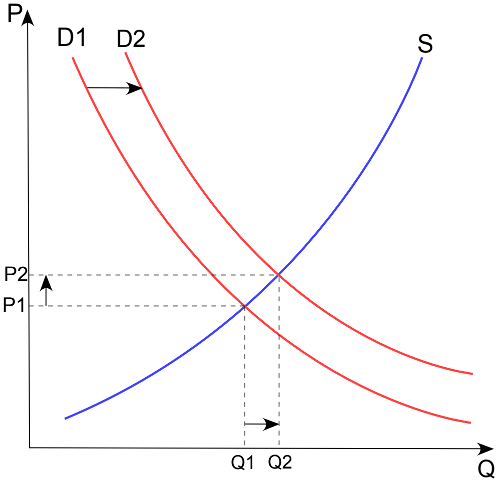
$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c[k-1] = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} u[k].$$

Příklady systémů

Příklad variace ceny



Rozdíl mezi lineárním a linearizovaným



Obsah přednášky

Iterace rovnice ceny

Diferenční rovnici

$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c[k-1] = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} x[k],$$

odvozenou na předešlých slajdech přepíšeme do kanonického tvaru

$$y[k] + \gamma y[k-1] = \beta u[k]$$

a postupnými iteracemi nalezneme pro $u[k] = \mathbf{1}[k]$ a počáteční podmínku $y[-1] = 0$:

Iterace rovnice ceny

Pro $k = 0$:

$$y[0] + \gamma y[-1] = \beta u[0]$$
$$y[0] = \beta - \gamma y[-1] = \beta$$

Pro $k = 1$:

$$y[1] + \gamma y[0] = \beta u[1]$$
$$y[1] = \beta - \gamma y[0] = \beta - \beta\gamma$$

Iterace rovnice ceny

Pro $k = 2$:

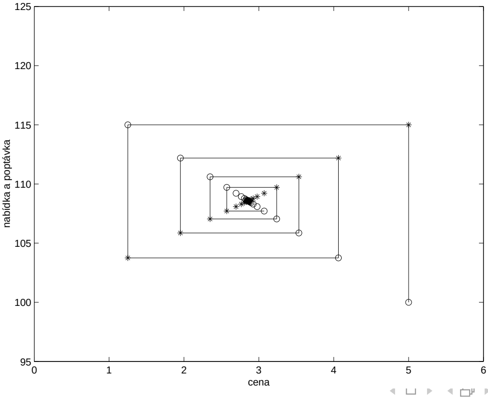
$$y[2] + \gamma y[1] = \beta u[2]$$
$$y[2] = \beta - \gamma y[1] = \beta - \beta\gamma + \beta\gamma^2$$

Pro obecné n:

$$y[n] + \gamma y[n-1] = \beta u[n]$$
$$y[n] = \beta - \gamma y[n-1] = \beta\left(1 - \gamma + \gamma^2 + \cdots + (-\gamma)^n\right)$$

Iterace rovnice ceny

$$y[n] = \beta \sum_{m=0}^{n} (-\gamma)^m = \beta \frac{1-(-\gamma)^{n+1}}{1+\gamma} = \frac{\beta}{1+\gamma} + \frac{\beta\gamma}{1+\gamma}(-\gamma)^n$$



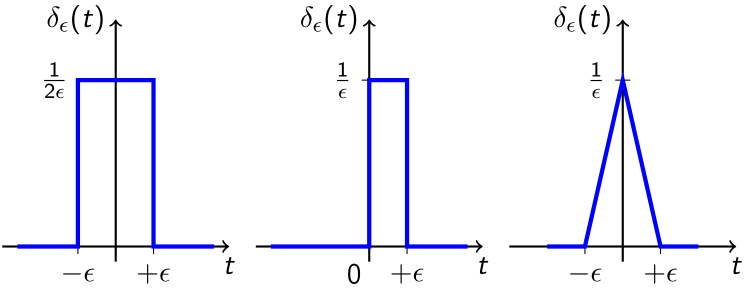
Obsah přednášky

Obsah přednášky

Diracův impuls

Přiblížení

Tato funkce je definována na časovém intervalu pro všechna t a její nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu $t = 0$. Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé $\varepsilon > 0$.



Funkci $\delta(t)$ definujeme jako $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t)$.

Diracův impuls
Definice

Funkce $\delta(t)$ se nazývá **Diracův impuls**, Diracova δ-funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota $\delta(t)$ pro $t \neq 0$ je $\delta(t) = 0$. Její hodnota v $t = 0$ není definována jako funkce, používá se integrální definice

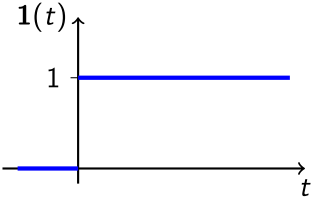
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\, \mathrm{d}t = \int_{0-}^{0+} \delta(t)\, \mathrm{d}t = 1$$

pro každé $\epsilon > 0$.

Jednotkový skok

Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena $\mathbf{1}(t)$ a je definována jako

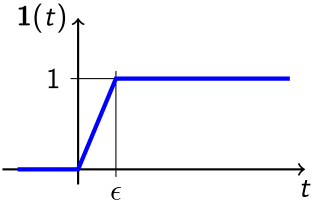
$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$



Jednotkový skok
Vztah $\delta(t)$ a $\mathbf{1}(t)$

Platí

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{1}(t).$$



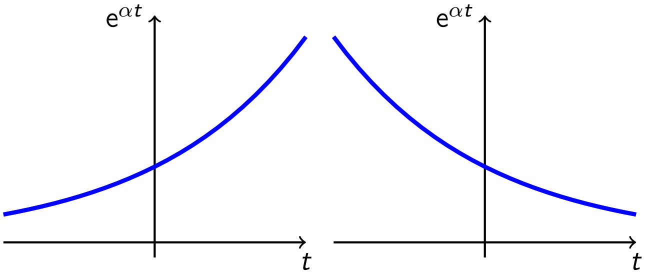
Exponenciála

Reálná

Uvažujme exponenciální funkci

$$f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t},$$

kde α je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.



Exponenciála

Komplexní

Exponenciální funkce

$$f(t) = A\,\mathrm{e}^{\alpha t},$$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$, je zajímavá hlavně v případě, kdy $\alpha = \mathrm{i}\omega$,

$$f(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = A\left(\cos \omega t + \mathrm{i}\,\sin \omega t\right).$$

Periodická funkce

O spojitém signálu $f(t)$ říkáme, že je periodický s periodou T, jestliže

$$\forall t : f(t+T) = f(t)$$

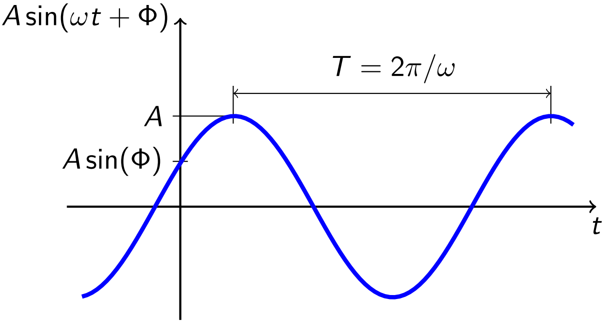
a tedy také pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$

$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = \cdots = f(t+k \cdot T)$$

Nejmenší možné T nazýváme **fundamentální perioda**, značíme T_0.

Sinusová funkce

$$f(t) = A\sin(\omega t + \Phi),$$



Konstanty A, ω a Φ se nazývají **amplituda**, **úhlová frekvence** a **fázový posun**. Sinusovka je periodická se základní periodou $T = 2\pi/\omega$.

Obsah přednášky

Vznik diskrétních signálů

Jak diskrétní signály vznikají?

- **přirozeně** (průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů)
- **vzorkováním spojitých signálů** (naměření teploty každou hodinu, měřením průtoku každých 15 minut)

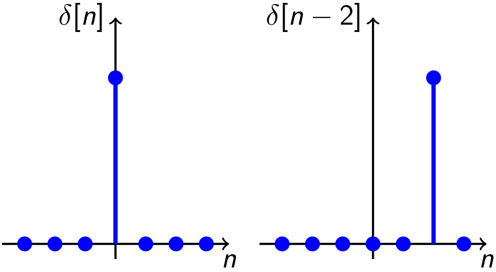
Diskrétní signály, jimiž se budeme v předmětu zabývat, jsou diskrétní v čase, ale spojité ve funkční hodnotě.

Digitální signál je totiž často **kvantovaný**, nabývá tedy v každém n pouze diskrétní množiny funkčních hodnot, například $\{0, 1, 2, \ldots, 65535\}$.

Diskrétní jednotkový impuls

Diskrétní jednotkový impuls $\delta[n]$ je definován vztahem

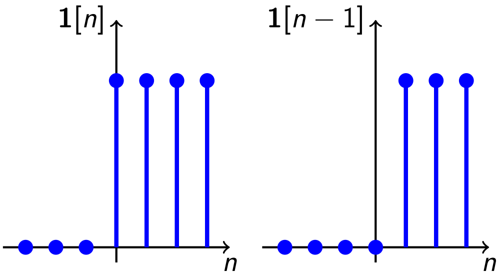
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0. \end{cases}$$



Diskrétní jednotkový skok

Diskrétní jednotkový skok $\mathbf{1}[n]$ je definován vztahem

$$\mathbf{1}[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0, \\ 0 & \text{pro } n < 0. \end{cases}$$

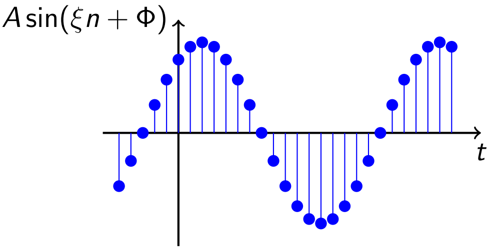


Diskrétní sinusová posloupnost

Mějme sinusový signál $f(t) = A\sin(\omega t + \Phi)$ s periodou $T = 2\pi/\omega$. Pokud tento signál vzorkujeme s periodou $T_s > 0$, získáme diskrétní sinusový signál

$$f[n] = f(nT) = A\sin(\omega n T_s + \Phi) = A\sin(\xi n + \Phi),$$

kde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ a $\xi = \omega T_s$.



Periodický signál

Diskrétní signál $f[n]$ je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo N takové, že platí

$$f[n] = f[n+N] = f[n+2N] = \cdots = f[n+k \cdot N]$$

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ (z intervalu $(-\infty, \infty)$) a pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. N se nazývá **perioda diskrétního signálu**.

Nejmenší možné N nazýváme **fundamentální perioda** a značíme N_0.

Periodický signál

Diskrétní sinusová posloupnost nemusí být periodická!

Diskrétní sinusový signál nemusí být nutně periodický, záleží na volbě vzorkovací periody T_s. Pro periodický diskrétní sinusový signál s periodou N musí platit

$$N = m \cdot \frac{2\pi}{T_s},$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Máme i $N \in \mathbb{N}$, proto $2\pi/T_s$ musí být racionální číslo.

Příklad (Neperiodický sinusový signál)

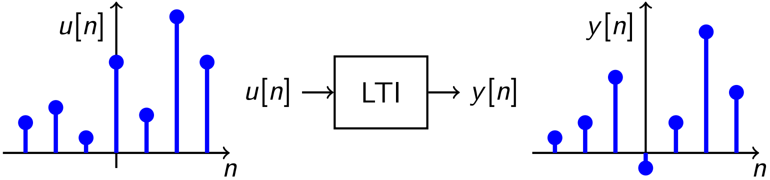
Signál

$$y[n] = \sin n$$

není pro $T_s = 0.1\,\mathrm{s}$ periodický, protože $2\pi/T_s$ není racionální číslo.

Obsah přednášky

Diskrétní systém



Diskrétní systém

Impulsní odezva

Definice (Impulsní odezva)

Odezvu systému na jednotkový impuls $\delta[n]$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h[n]$,

$$
\begin{aligned}
h[n] &= \mathcal{S}\{\delta[n]\} \\
h[n, m] &= \mathcal{S}\{\delta[n - m]\}\,. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

Diskrétní systém
Přechodová odezva

Definice (Přechodová odezva)

Odezvu systému na jednotkový skok $\mathbf{1}[n]$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s[n]$,

$$s[n] = \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^{n} \delta[n-m]\right\}.$$

Lineární systém

Definice (Linearita)

V matematice označujeme funkci $f(x)$ jako lineární v případě, že je

1. aditivní $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ a
2. homogenní, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Obdobně to platí i pro lineární systémy.

Definice (Lineární systém)

Systém je lineární, pokud pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$\mathcal{S}\{u_1[n] + u_2[n]\} = \mathcal{S}\{u_1[n]\} + \mathcal{S}\{u_2[n]\}\,,$$
$$\mathcal{S}\{\alpha u[n]\} = \alpha\mathcal{S}\{u[n]\}\,.$$

Princip superpozice

Definice (Princip superpozice)

Pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$y_1[n] = \mathcal{S}\{u_1[n]\}$$
$$y_2[n] = \mathcal{S}\{u_2[n]\}$$

a pro $u[n] = \alpha u_1[n] + \beta u_2[n]$ také

$$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\{\alpha u_1[n] + \beta u_2[n]\}$$

Obecně platí

$$u[n] = \sum_i a_i u_i[n] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_i a_i y_i[n] = \sum_i a_i \mathcal{S}\{u_i[n]\}$$

Příklad

Příklad (Lineární systém)

Uvažujme systém

$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n].$$

Je-li na vstupu lineární kombinace dvou různých signálů

$$u[n] = b_1 u_1[n] + b_2 u_2[n]$$

je na výstupu

$$y[n] = b_1\,(y_1[n] + a\,y_1[n-1]) + b_2\,(y_2[n] + a\,y_2[n-1])$$

kde

$$\begin{aligned} y_1[n] + a\,y_1[n-1] &= u_1[n] \\ y_2[n] + a\,y_2[n-1] &= u_2[n] \end{aligned}$$

Příklad

Příklad (Nelineární systém)

Numerický výpočet druhé odmocniny lze zapsat rekurentním vztahem

$$y[n+1] = \frac{1}{2}\left(y[n] + \frac{u[n]}{y[n]}\right).$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna $\sqrt{10} = 3{,}16227766017$. Pro $u[n] = u[0] = 10$ dostáváme postupně

n	$y[n]$	$y^2[n]$
1	3	9
2	3,165	10,017225
3	3,162278	10,00000214928
4	3,162277660	9,999999999568
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Lineární systém

Odezva na obecný vstupní signál

Pro obecný vstupní signál $u[n]$ je pak odezva lineárního systému

$$y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,\delta[n-m]\right\}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,\mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,h[n,m].$$

Vidíme, že chování systému je zcela určeno jeho odezvami na různě posunuté jednotkové pulsy $h[n,m]$.

Lineární systém

Přechodová odezva

Přechodová odezva diskrétního lineárního systému $s[n]$ je dána prostým součtem impulsních odezev pro $0 \leq m \leq n$

$$s[n] = \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^{n} \delta[n-m]\right\}$$
$$= \sum_{m=0}^{n} \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=0}^{n} h[n,m].$$

Lze za nějakých podmínek zjednodušit $h[n,m]$?

Časově invariantní systém

Systém se nazývá **časově invariantní**, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n - m$ a nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

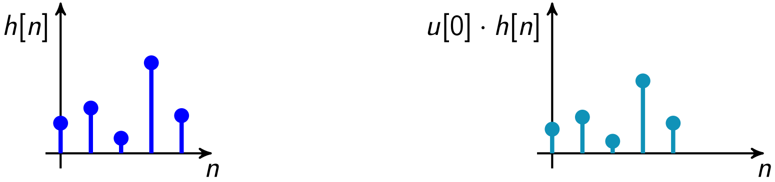
$$\begin{array}{lll} \text{dnes} & \dots & y[n] = \mathcal{S}\left[u[n]\right] \\ \text{včera} & \dots & y[n-1] = \mathcal{S}\left[u[n-1]\right] \\ & & \vdots \end{array}$$

Potom také rovnice pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

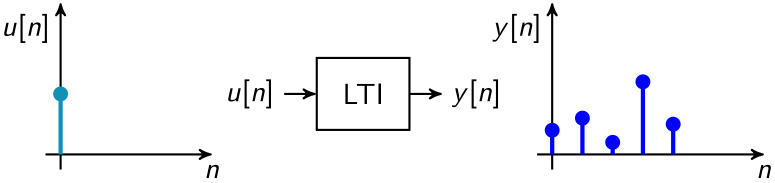
$$h[n,m] \to h[n-m] = \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}\,.$$

Časově invariantní systém

Superpozice odezvy $y[n]$ z $h[n-k]$



$$y[n] = u[0] \cdot h[n]$$



Konvoluce

V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice **konvoluční sumu**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m] \cdot u[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k],$$

kterou pro úsporu místa značíme

$$y[n] = h[n] * u[n].$$

Pozor: nejde o násobení!

$$h[n] \neq \frac{y[n]}{u[n]}$$

Příklad

Příklad (Časově invariantní systém)

Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsaný diferenční rovnici

$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n].$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj. a je konstantní a není funkcí n, zachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n-m$. Impulsní odezva je potom

$$h[n] = (-a)^n \mathbf{1}[n].$$

Příklad

Příklad (Časově proměnný systém)

Uvažujme nyní obměněnou diferenční rovnici

$$y[n] + n \cdot y[n-1] = u[n].$$

Koeficient u $y[n-1]$ závisí na čase a tato rovnice nezachovává tvar při záměně $n \to n-m$. Impulsní odezvu lze psát ve tvaru

$$h[n] = (-1)^n \, n! \, \mathbf{1}[n].$$

Kauzální systém

Systém je **kauzální**, pokud jeho výstup závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupů.

Výstupní signál $y[n]$ kauzálního systému tedy závisí pouze na $\{u[n], u[n-1], u[n-2], \dots\}$. V konvoluční sumě proto

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, u[n-k] \\
&= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]\, u[n-k]}_{0} + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, u[n-k]
\end{aligned}
$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy $h[n] = 0$ pro $n < 0$.

Kauzální systém

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k] \cdot h[n-k].$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall n < 0 : u[n] = 0, y[n] = 0$ (oba signály mohou mít nenulové členy pouze pro $n \geq 0$), potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} h[n-k] \cdot u[k].$$

Spojité systémy

Impulsní a přechodová odezva

Definice (Impulsní odezva)

Odezvu systému na Diracův impuls $\delta(t)$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h(t)$,

$$h(t) = \mathcal{S}\{\delta(t)\}$$
$$h(t,\tau) = \mathcal{S}\{\delta(t-\tau)\}\,.$$

Definice (Přechodová odezva)

Odezvu systému na jednotkový skok $\mathbf{1}(t)$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s(t)$,

$$s(t) = \mathcal{S}\{\mathbf{1}(t)\} = \mathcal{S}\left\{\int_0^t \delta(t-\tau)\,\mathrm{d}t\right\}.$$

Spojité systémy

Konvoluce

V případě spojitého casu postupujeme podobně a odvodíme pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\cdot u(\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

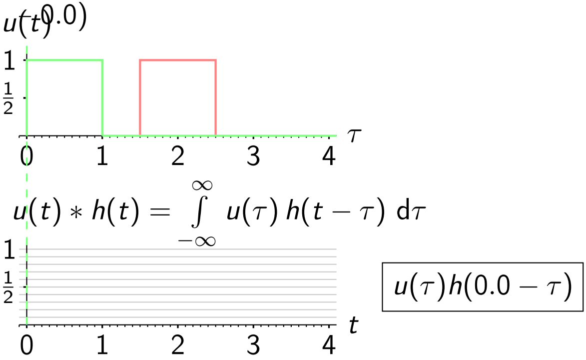
Operaci často zapisujeme ve zjednodušené formě jako

$$y(t) = h(t) * u(t).$$

Opět připomínáme, že se v tomto zápisu nejedná o násobení!

Spojité systémy

Příklad konvoluce



Spojitý systém

Pro $u(t) = \delta(t)$ platí pro lineární a časové invariantní systém samozřejmě

$$y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cdot \delta(t - \tau) \, \mathrm{d}\tau = h(t).$$

Spojité systémy

Kauzální systém

Výstupní signál $y(t)$ spojitého kauzálního systému závisí pouze na hodnotách vstupů pro předešlé časové okamžiky. Z důvodu, které klademe na kauzální chování systému, přejde konvoluční integrál na tvar

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \\
&= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau}_{0} + \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau
\end{aligned}
$$

a hodnoty impulsní odezvy pro $t < 0$ uvažujeme opět $h(t) = 0$.

Spojité systémy

Konvoluce pro kauzální LTI systém

Konvoluční integrál pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) \cdot u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^{\infty} u(\tau) \cdot h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall t < 0 : u(t) = 0, y(t) = 0$ (oba signály mohou být nenulové členy pouze pro $t \geq 0$), potom platí

$$y(t) = \int_0^{t} h(\tau) \cdot u(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int_0^{t} u(\tau) \cdot h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau.$$

Charakteristiky systémů

Autonomní systém

Definice (Autonomní systém)

Za autonomní systém považujeme takový, který **nemá vstup**. Diskrétní autonomní systém je popisuje tedy například diferenční rovnice vnějšího popisu

$$y[n+1] + a\,y[n] = 0.$$

Výstup autonomního systému je odezvou na počáteční podmínky.

V případě, že systém má vstup $u[n]$, tedy

$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n],$$

systém pokládáme za neautonomní.

Definice stability
BIBO stabilita systému

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

Stabilita systémů

Impulsní odezvu LTI systému lze vždy zapsat jako součet exponenciel ve tvaru

$$h(t) = \sum_{\mu=0}^{n} k_\mu e^{p_\mu t}.$$

Pro $p_\mu \in \mathbb{R}$ je $h(t)$ reálná exponenciela, která pro $t \to \infty$ buď roste nade všechny meze ($p_\mu > 0$) nebo klesá k nule ($p_\mu < 0$).

Pro $p_\mu \in \mathbb{C}$ je $h(t)$ komplexní exponenciela, která pro $t \to \infty$ kmitá a buď roste nade všechny meze nebo klesá k nule, záleží na $\Re p_\mu$.

Stabilita systémů

Z výše uvedené úvahy vyplývá, jak z polohy pólů přenosové funkce jednoduše odvodíme tvar impulsní odezvy a tedy stabilitu ($\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$) respektive nestabilitu ($\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$) systému:

- Pro stabilní systém platí $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ a všechna .
- V impulsní odezve se nachází minimálně jedna rostoucí exponenciela, jež bude hodnotě $h(t)$ postupně dominovat, a je tedy $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$.
- Systém může být ale nestabilní i v jiných případech.