# *Řízení a optimalizace*
# *Stavové modely a model-prediktivní řízení*

*Matematické metody pro ITS (11MAMY)*

*Jan Přikryl*

*2. přednáška 11MAMY*

*úterý 27. února 2018*

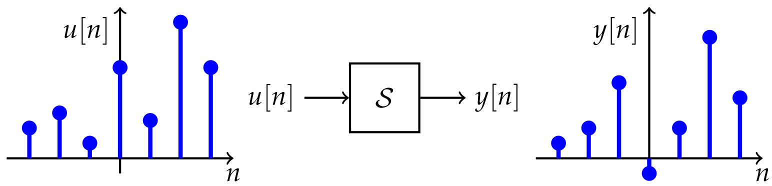
*verze: 2018-03-18 09:34*

## *Obsah*

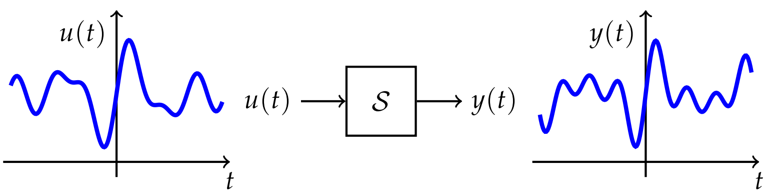
Tento text je do jisté míry experimentálním pískovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v LaTeXové třídě `beamer` do textu vysázeného pomocí `tufte-handout`. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

## *Vnější popis systému*

### *Opakování*




Obrázek 1: Vnější popis obecného diskrétního systému




Obrázek 2: Vnější popis obecného spojitého systému

## *Vnitřní popis systému*

Vnitřní popis dynamického systému je vztah mezi všemi veličinami systému, je to tedy relace mezi vstupními, stavovými a výstupními veličinami. Vnitřní popis je nejčastěji vyjádřen stavovými rovnicemi. Vnější popis, o němž jsme se bavili do této chvíle, je relace pouze mezi vstupními a výstupními veličinami, vyloučili jsme z něj veličiny stavové a systém popsaný vnějším popisem považujeme za černou skříňku (angl. *black box*).

Problémem souvislosti vnitřního a vnějšího popisu jsme se dosud nezabývali. Známe-li vnitřní popis –- stavové rovnice, snadno z něho jednodušší vnější popis odvodíme tak, že vyloučíme stavové proměnné. Obrácený postup, tedy určení vnitřního popisu z popisu vnějšího, již není tak jednoduchý. Vnitřní popis systému je bohatší a získáme jej z jednoduššího vnějšího popisu pouze za určitých předpokladů o struktuře systému. Z vnějšího popisu není totiž zřejmé, kolik má systém stavů, neboli jaká je dimenze stavového prostoru, ani jak zvolit jeho bázi. Určení vnitřního popisu z popisu vnějšího se nazývá problém realizace systému **?**.

### *Vnitřní popis nelineáního systému*

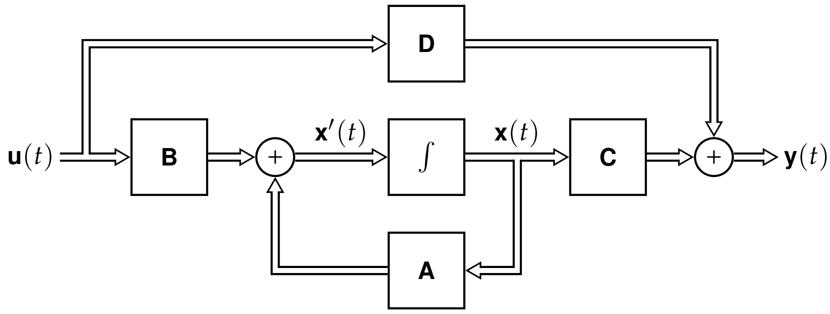
| **Spojitý systém** | **Diskrétní systém** |
|---|---|
| vektor vstupních (řídicích) proměnných $\mathbf{u}(t)$ | $\mathbf{u}[n]$ |
| stavový vektor $\mathbf{x}(t)$ | $\mathbf{x}[n]$ |
| vektor výstupních proměnných $\mathbf{y}(t)$ | $\mathbf{y}[n]$ |
| $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ | $\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$ |
| $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ | $\mathbf{y}[n] = \mathbf{g}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$ |

### *Vnitřní popis lineárního systému*

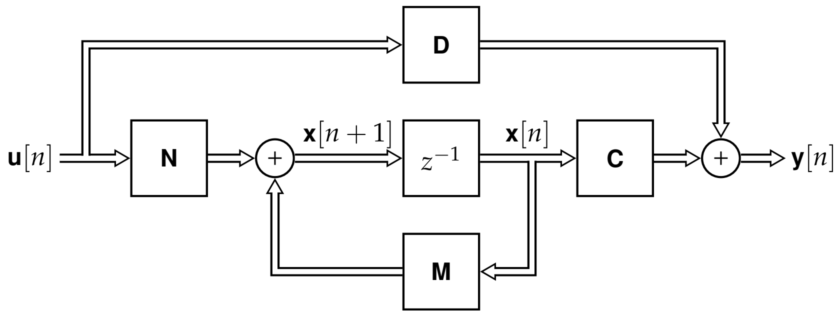
Nejprve obecnější nestacionární systém.

| **Spojitý systém** | **Diskrétní systém** |
|---|---|
| $\mathbf{u}(t)$ ... vektor vstupních (řídicích) proměnných | $\mathbf{u}[n]$ |
| $\mathbf{x}(t)$ ... stavový vektor | $\mathbf{x}[n]$ |
| $\mathbf{y}(t)$ ... vektor výstupních proměnných | $\mathbf{y}[n]$ |
| $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}(t)$ | $\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}[n]\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}[n]\,\mathbf{u}[n]$ |
| $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{u}(t)$ | $\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n]\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}[n]\,\mathbf{u}[n]$ |

| **Spojitý systém** | **Diskrétní systém** |
|---|---|
| $\mathbf{u}(t)$ ... vstupní (řídicí) vektor | $\mathbf{u}[n]$ ... vstupní (řídicí) vektor |
| $\mathbf{x}(t)$ ... stavový vektor | $\mathbf{x}[n]$ ... stavový vektor |
| $\mathbf{y}(t)$ ... výstupní vektor | $\mathbf{y}[n]$ ... výstupní vektor |
| $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$ | $\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,\mathbf{u}[n]$ |
| $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$ | $\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{u}[n]$ |
| $\mathbf{A}$ je matice systému $(n \times n)$ | $\mathbf{M}$ je matice systému $(n \times n)$ |
| $\mathbf{B}$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$ | $\mathbf{N}$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$ |
| $\mathbf{C}$ je výstupní matice $(m \times n)$ | $\mathbf{C}$ je výstupní matice $(m \times n)$ |
| $\mathbf{D}$ je výstupní matice $(m \times r)$ | $\mathbf{D}$ je výstupní matice $(m \times r)$ |




Obrázek 3: Blokové schéma spojitého LTI systému




Obrázek 4: Blokové schéma diskrétního LTI systému

## *Příklady na stavový popis dynamických systémů*

### *Cykloida*

Pohyb po **cykloidě** je popsán parametrickou soustavou rovnic

$$
\begin{aligned}
x &= x_1(t) = a\,t - d\sin t,\\
y &= x_2(t) = a - d\cos t,
\end{aligned}
$$

která je pro počáteční podmínky

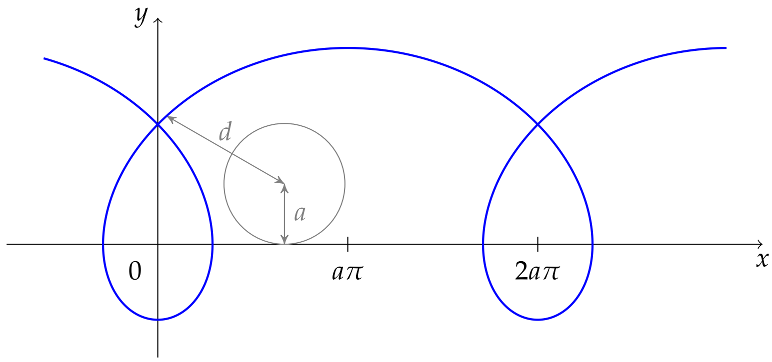
$$x_1(0) = 0 \quad \text{a} \quad x_2(0) = a - d$$

dána řešením stavové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} t.$$

### *Modely typu predátor-kořist*

Nelineární stavový model **vlci a ovečky**, který je znám v literatuře jako *Lotka-Volterra predator-prey model*, se týká populace ovcí popsané stavovou proměnnou $x_1(t)$ a populace vlků popsané stavovou proměnnou $x_2(t)$.




Obrázek 5: Cykloida vznikne odvalováním bodu ve vzdálenosti $d$ od středu kružnice s poloměrem $a$

Dynamický model je dán nelineární soustavou stavových rovnic

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) = a\,x_1(t) - b\,x_1(t)x_2(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = -c\,x_2(t) + d\,x_1(t)x_2(t).$$

Uvedený model můžeme snadno interpretovat. Žijí-li ovce a vlci odděleně, pro ovce platí rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) = a\,x_1(t),$$

jejímž řešením je exponenciální růst populace ovcí nade všechny meze (neuvažujeme omezení zdrojů potravy, nemoci a tak dále)

$$x_1(t) = x_1(0)\,\mathrm{e}^{at},$$

zatímco bez potravy je přírůstek populace vlků záporný

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = -c\,x_2(t)$$

a vlci hynou,

$$x_2(t) = x_2(0)\,\mathrm{e}^{-ct}.$$

Počet sežraných ovcí a nasycených vlků je úměrný počtu jejich setkání – ten je dán součinem

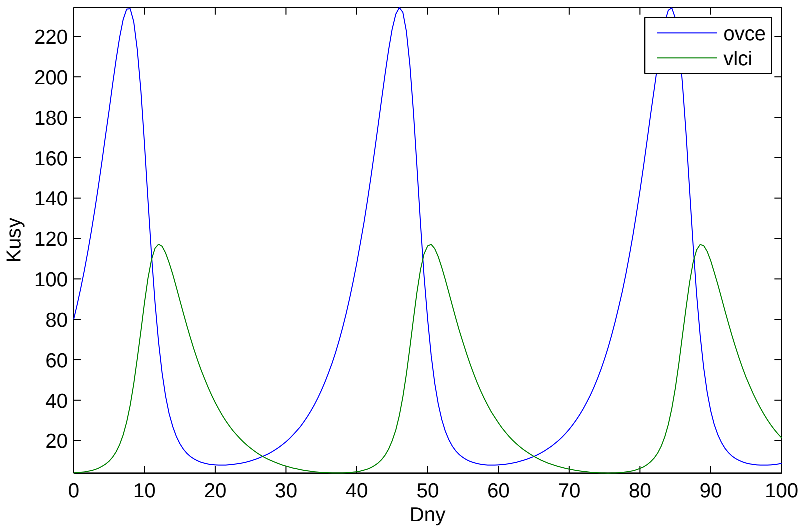
$$x_1(t)x_2(t)$$

a počet ovcí klesá úměrně s

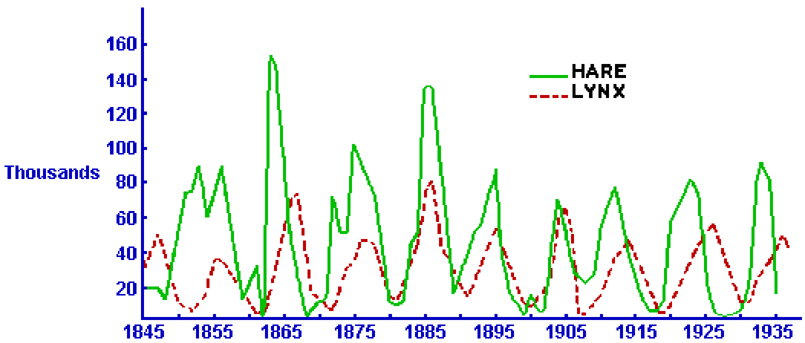
$$-b\,x_1(t)x_2(t)$$

zatímco se vlci mají dobře a jejich počet stoupá úměrně s

$$d\,x_1(t)x_2(t).$$




Obrázek 6: Vývoj populací vlků a oveček s parametry $x_1(0) = 80$, $x_2(0) = 4$, $a = 0{,}2$, $b = 0{,}006$, $c = 0{,}2$, $d = 0{,}003$




Obrázek 7: Vývoj populací rysů a sněžných zajíců v Kanadě

### *Úrovně modelování*

V nějakých případech jsme schopni přesně matematicky popsat chování celého systému.

V případě složitých systémů s mnoha neurčitými vazbami to však tak jednoduché není.

Podle toho, kolik informací o modelovaném systému máme, lze modely dělit do tří skupin:

- white-box
- gray-box
- black-box

### *Přesný model systému*

White-box

Zcela odvozeny ze základních zákonů fyziky, chemie, ekonomie, ... (first-principle models).

Všechny rovnice a parametry lze určit na teoretické úrovni.

Také kombinace modelů, i v případě, že některé parametry odhadnuty z dat.

Charakteristická vlastnost: nezávislé na datech, parametry přímo interpretovatelné jako základní veličiny (hmotnost, rychlost, národní důchod, ...).

### *Model systému z naměřených dat*

Black-box

Zcela závislé na měřených datech.

Jak **struktura modelu**, tak i **parametry** jsou odvozeny experimentálně.

Nevyužíváme žádnou apriorní informaci o modelovaném systému.

Parametry typicky nemají žádný vztah k základním veličinám.

Algoritmy strojového učení s učitelem: Známe vstupní a výstupní data, použijeme generický model, jehož parametry nastavíme.

Vyžaduje trénovací a testovací data

Velmi rozšířené v inženýrské praxi

Příklad: AR (autoregresní modely), ANN (neronové sítě), SVM (support vector machines), GP (Gaussovské procesy)

Dělíme na

- parametrické
- neparametrické

**Parametrické modely** předpokládají existenci *konečné množiny parametrů* $\theta$. Jakmile jednou najdeme parametry, budoucí predikce modelu $x$ nezávisí na množině právě pozorovaných dat $\mathcal{D}$, je tedy

$$P(x|\theta, \mathcal{D}) = P(x|\theta).$$

Složitost modelu je ohraničená, i když množství pozorovaných dat ohraničené není.

Tyto modely nejsou flexibilní.

**Neparametrické modely** nepředpokládají, že data lze reprezentovat distribuční funkcí založenou na konečné množině parametrů. Mnohdy je ale definujeme ze předpokladu, že $\theta$ *má nekonečnou dimenzi*. Typicky je $\theta$ nějaká funkce.

V tomto případě může $\theta$ obsáhnout rostoucí objem informace o datech tak, jak $\mathcal{D}$ roste.

Tyto modely jsou složitější, ale zato jsou flexibilní.

http://mlss.tuebingen.mpg.de/2015/slides/ghahramani/gp-neural-nets15.pdf

Jednoduchý nástroj na modelování složitých vztahů v datech.

BIG DATA!

Příklady

| Parametrické | Neparametrické | Aplikace |
|---|---|---|
| polynomiální regrese | Gaussovský proces | aproximace fcí |
| logistická regrese | GP klasifikátor | klasifikace |
| směsové modely, $k$-means | směs Dirichletovských procesů | shlukování |
| skryté Markovské modely | nekonečné HMM | časové řady |
| faktorová analýza, PCA, PMF | nekonečné latentní FM | hledání příznaků |

Tabulka 1: Základní přehled parametrických a neparametrických metod matematického modelování systémů z naměřených dat. Jde vždy o metody statistického učení, blíže viz **?**

■ **velmi nahrubo a nesrozumitelné** ■

V ILS[1] lze narazit na jednoduchou otázku porovnání neparametrických modelů (tj. například spline) s parametrickými modely (např. lineární regrese) podle různých scénářů. Otázkou je:

Jaké bude obecné očekávání lepší nebo horší výkonnosti parametrické metody statistického učení v porovnání s neparametrickou, pokud:

1. Počet prediktorů $p$ je extrémně velký, a počet pozorování $n$ je malý?

2. Rozptyl chybových členů[2], tj. $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\mathbf{e})$, je velmi vysoký?

V těchto situacích srovnání flexibilních a neflexibilních modelů také závisí na

- vztahu $y = f(x)$ – jak dalece je tento vztah lineární nebo naopak velmi nelineární,
- tom, jak jsme naladili/omezili rozsah flexibility u neparametrického modelu při jeho identifikaci.

Pokud se hledaný vztah nachází v blízkosti lineární reprezentace a neomezíme nějak flexibilitu, lineární model by měl poskytnout lepší testovací chybu v obou výše uvedených případech, protože flexibilní model pravděpodobně v obou případech přetrénujeme (chytí se šumu, overfitting).

Můžeme to vysvětlit následovně:

- V obou případech údaje neobsahují dostatek informací o skutečném vztahu (v prvním případě vztahu je vysoká rozměrová složitost úlohy, $p$ je vysoké, a nemáme dostatek dat; v druhém případě jsou data poškozena šumem)
- Lineární model přináší některé externí apriorní informace o skutečné závislosti (omezujeme třídu hledaných modelů vestavěnými vazbami pouze na ty lineární) a že před info dopadá být správná (true vztah se nachází v blízkosti lineární). Neparametrický model neobsahuje žádné předběžné informace (je schopen se adaptovat na jakákoliv data), takže se bude držet šumu v datech tak dalece, jak mu to dovolíme.

Jestliže je však hledaný vztah velmi nelineární, je těžké říci, jaký model vyhraje. Spíše lze asi tvrdit, že prohrrají oba postupy, protože ani jeden nebude fungovat správně.

Pokud naladíme/omezíme míru flexibility a uděláme to správným způsobem (například křížovou validací), potom s neparametrickým (flexibilním) modelem bychom měli uspět ve všech případech.

### *Gray-box*

Gray-box

Kompromis / kominace mezi white-box a black-box modelem. Možné jsou všechny možné kombinace.

Jeho popis může obsahovat také kvalitativní informace o modelovaném systému, např. popis chování systému ve formě pravidel.

**Charakteristika:** slučuje všechny možné snadno dostupné zdroje informací o systému.

[2] Chybový člen je například $|\tilde{x} - x|$, kde $\tilde{x}$ je odhadovaná hodnota a $x$ je reálná hodnota. Tvar členu závisí na chybové normě.

**Struktura modelu** bývá odvozena z expertních znalostí, **parametry** modelu jsou ale určeny z dat.

| | White-box | Gray-box | Black-box |
|---|---|---|---|
| Zdroje informací | základní principy<br>znalosti | kvalitativní znalosti<br>pravidla<br>částečné znalosti a data | experimenty<br>data |
| Vlastnosti | dobrá extrapolace<br>dobré pochopení<br>vyzoká spolehlivost<br>škálovatelnost | | krátká doba vývoje<br>nevyžaduje expertní znalosti<br>lze i pro neznámé procesy |
| Nevýhody | časově náročné<br>vyžaduje znalosti<br>znalosti omezují přesnost<br>pouze pro známé procesy | | nelze extrapolovat<br>není škálovatelné<br>přesnost omezena daty<br>málo pochopení |
| Aplikační oblasti | plánování<br>konstrukce, design<br>spíše jednoduché procesy | | pouze pro existující procesy<br>spíše složité procesy |

Tabulka 2: Základní rozdělení white-box, gray-box a black-box modelů

## *Základy teorie řízení*

Následující text je velmi inspirován skriptem pánů Havleny a Štecha (**?**).

Každý z nás mnohokrát denně dělá v nejrůznějších situacích různá rozhodnutí. Jsou to rozhodování typu kam půjdu, co udělám, co udělám nyní a co později a podobně. Jistě platí, že úspěch člověka podstatnou měrou závisí na jeho správných rozhodnutích, zvláště v klíčových situacích.

Abychom se rozhodovali správně, vytváříme si, vědomě či nevědomě, ve své mysli modely situací a podle nich vážíme důsledky různých variant, které máme při rozhodování k dispozici. Rozhodneme se samozřejmě pro tu variantu, jejíž důsledek je pro nás nejpříznivější. Skutečný důsledek našeho rozhodnutí poznáme ale až později, při rozhodování možné důsledky odhadujeme (predikujeme) pouze pomocí modelu dané situace. Model si tedy vytváříme za účelem predikce budoucích důsledků našich možných rozhodnutí. Čím lepší model situace si vytvoříme, tím, po zvážení všech důsledků, máme lepší možnost vybrat si dobrou variantu pro naše rozhodnutí.

Naše rozhodnutí závisí tedy na tom, jak věrný model situace jsme si schopni vytvořit. Při tom se samozřejmě uplatňuje naše zkušenost, intuice a vědomosti. Často si model situace vytváříme při rozhovoru s přáteli a porovnáváme jejich názor (jejich model situace a jeho hodnocení) s názorem svým. Naše rozhodnutí závisí také na tom, jaké kritérium pro vážení různých důsledků si vybereme.

Ani to není mnohdy věc jednoduchá. Při hodnocení rozhodnutí provedených v minulosti a jejich skutečných důsledků si často uvědomujeme, jak nevhodné kritérium jsme si v minulosti zvolili.

Při rozhodování se někdy uplatňuje časové omezení. V dané situaci je třeba se rychle rozhodnout, ale pro správné rozhodnutí je třeba vytvořit dobrý model situace, což vyžaduje určitý čas. Nutnost rychlého rozhodnutí stojí v přímém protikladu k časově náročnému procesu vytváření modelu dané situace. Při tom se uplatňuje také složitost rozhodovacího algoritmu, kterou je také třeba někdy omezit. Proto se často pod tlakem času musíme rozhodovat podle velmi zjednodušených modelů dané situace, které zahrnují pouze nejpodstatnější jevy.

Naopak nejsme-li při rozhodování v časové tísni, často provádíme různé testy, abychom lépe porozuměli rozhodovací situaci. Tak na příklad nakoupíme vzorek zboží, abychom poznali jeho kvalitu; partnera podrobíme různým zkouškám, abychom lépe poznali jeho povahu a podobně.

Diskrétní řízení dynamických systémů je vlastně posloupnost rozhodování o volbě velikosti řídicí veličiny v různých časových okamžicích. Proto při řízení dynamických systémů postupujeme principiálně stejným způsobem jako při volbě našich rozhodnutí v nejrůznějších životních situacích.

Dynamický systém

Řízením působíme na reálný svět. Tu část reality, kterou řídíme, nazýváme objekt. Abychom nějaký objekt dobře řídili, je třeba si vytvořit dobrý model objektu. To znamená, že na objektu si definujeme systém. Dynamický systém si vytváříme pro predikci chování objektu v budoucnosti. Existují v podstatě dva způsoby tvorby systému na daném objektu či procesu, a to analytický a experimentální.

Při prvním způsobu využíváme různé fyzikální, biologické, ekonomické a jiné zákonitosti a na jejich základě hledáme vztahy mezi veličinami, které nás zajímají. Tomuto způsobu vytváření modelu objektu se říká matematicko - fyzikální analýza. Dynamický systém vzniklý na základě matematicko-fyzikální analýzy je často složitý, a proto abychom ho mohli použít, je nezbytné ho zjednodušit. V tom je další úskalí. Ve vztazích mezi veličinami se vyskytují různé konstanty, jejichž velikost se mnohdy určuje obtížně.

Druhý způsob tvorby systému je založen na měření provedeném na skutečném objektu, rozboru změřených dat a tím určení vztahů mezi veličinami. Tomuto způsobu vytvářen modelu objektu se říká experimentální identifikace. Systém si při tomto způsobu představujeme jako černou skříňku (black box). Při tomto způsobu tvorby modelu je třeba vzít v úvahu to, že měření má vždy omezenou přesnost, a proto je model objektu vzniklý tímto způsobem velmi často stochastický systém.

Samozřejmě nejlepší cesta je kombinace analytického a experimentálního způsobu tvorby systému. Pomocí analytického přístupu určíme například strukturu systému. Potom při experimentální identifikaci přistupujeme k systému jako k šedé skříňce (gray box), o které již máme částečné znalosti z analytického rozboru. Modelem situace nebo objektu je tedy systém, a protože budeme sledovat časový průběh veličin, bude se jednat o dynamický systém. Systém je znázorněn na obr. 1.1.

Veličiny, které na systém působí z okolí a jsou na systému nezávislé, nazýváme vstupní veličiny. Tyto veličiny rozdělujeme na dvě skupiny. Jedna skupina vstupních veličin jsou takové veličiny, které můžeme měnit podle potřeby. Ty nazýváme řídicí veličiny systému a značíme je u. Řídicí veličiny systému se také nazývají akční veličiny. Druhou skupinou vstupních veličin jsou takové veličiny, které působí na systém nezávisle na nás a nemáme možnost je měnit. Takové veličiny nazýváme poruchové veličiny a značíme je v. Pro účely řízení je třeba ještě poruchové veličiny rozdělit na poruchové veličiny měřitelné a neměřitelné.

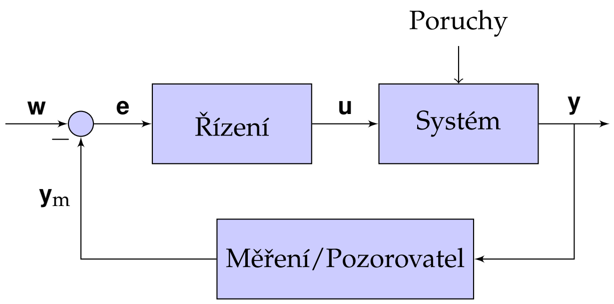
Veličiny, které produkuje systém a které měříme, nazýváme výstupní veličiny systému. Veličiny, které chceme řídit nebo regulovat, nazýváme regulované veličiny a značíme je y. Výstupní veličiny systému nemusí být totožné s veličinami regulovanými. Požadavky kladené na řízení

Teorie automatického řízení zkoumá metody jak působit na systém, jak ho řídit, aby se řízený systém choval podle našich požadavků. Požadavky kladené na řízení mohou být různé.

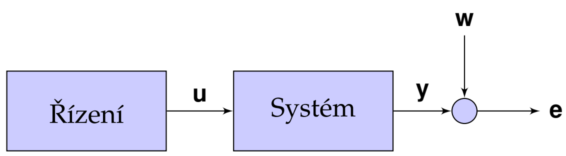
- Kompenzace vlivu poruchových veličin (Disturbance Rejection)
  Na systém vždy působí celá řada poruchových veličin, jejichž vliv na regulovanou veličinu je mnohdy nežádoucí. Někdy je poruchová veličina měřitelná a potom lze její vliv kompenzovat účinně tím způsobem, že signál od měřitelné poruchy zpracujeme v řídicím členu. Tak lze někdy vliv poruchy kompenzovat beze zbytku. Pokud se tímto způsobem porucha na výstupu systému vůbec neprojeví (řídicí člen její vliv úplně kompenzuje), pak říkáme, že řízený systém je invariantní vzhledem k poruše.
- Problém regulátoru (Regulator Problem)
  Dynamické vlastnosti samotného systému jsou někdy nevyhovující (například systém je nestabilní) a účelem řízení je navrhnout takovou strukturu řízení, aby celý systém měl potom vyhovující dynamické vlastnosti. Často chceme tímto způsobem systém stabilizovat.
- Problém sledování (Tracking Problem)
  Někdy požadujeme, aby výstupní veličina co nejvěrněji sledovala nějaký průběh určený referenční veličinou $w$, chceme tedy, aby byla co nejmenší takzvaná regulační odchylka $e$, která je rozdílem mezi požadovanou veličinou a skutečným výstupem ze

systému (čili $e = w - y$). Často je nutné respektovat různá omezení na velikost řídicí veličiny u či omezení na velikost celkové řídicí energie.

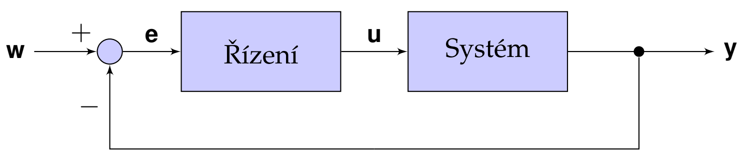
- Optimální řízení (Optimal Control)
  V moderní teorii řízení jsou všechny požadavky na řízení shrnuty do kritéria kvality řízení a problém řízení je převeden na optimalizační problém minimalizace kritéria kvality řízení. Při tomto přístupu k řešení problému řízení existují dva zásadní problémy. Prvním problémem je vhodná volba kritéria kvality řízení, která by zahrnula všechny naše požadavky na kvalitu řízení. Druhým problémem je řešitelnost takto formulovaného optimalizačního problému. Nejvíce používaným kritériem kvality řízení je kvadratické kritérium, které pro lineární systémy vede na lineární zákon řízení.




Ovládání:




Regulace:




**Definition 1** (Dosažitelnost)**.** Stav $\mathbf{x}$ je dosažitelný, existuje-li řízení $\mathbf{u}(t)$, které za konečný čas převede počáteční stav $\mathbf{x}(t_0) = 0$ do stavu $\mathbf{x}$. Jsou-li všechny stavy systému dosažitelné, říkáme, že *systém je dosažitelný*.

Při vyšetřování dosažitelnosti tedy vycházíme z nulového počátečního stavu a ptáme se na existenci řízení $\mathbf{u}(t)$ s uvedenými vlastnostmi.

**Definition 2** (Řiditelnost stavu)**.** Stav $\mathbf{x}$ je řiditelný, existuje-li řízení $\mathbf{u}(t)$, které v konečném čase převede tento stav do počátku (do nulového stavu). Jsou-li všechny stavy systému řiditelné, říkáme, že *systém je řiditelný*.

Při vyšetřování řiditelnosti je stav $\mathbf{x}$ počátečním stavem a požadujeme konečný čas převodu.

**Definition 3** (Řiditelnost na výstupu)**.** Systém je řiditelný na výsupu, pokud existuje funkce řízení $\mathbf{u}(t)$ taková, že převede výstup $\mathbf{y}(t_0)$ na $\mathbf{y}(t_1)$ v konečném čase $t_1 - t_0$.

**Definition 4** (Pozorovatelnost)**.** Systém je pozorovatelný, když změřením vstupu a výstupu na konečném časovém intervalu je možno určit hodnotu stavu systému na počátku měření.

Nemůžeme-li rozborem změřených hodnot vstupu a výstupu jednoznačně určit počáteční stav systému, pak systém obsahuje nepozorovatelné stavy. Jsou to takové stavy systému, které se na výstupu systému vůbec neprojeví.

Měřením lze zjistit vlastnosti pouze u pozorovatelné části systému.

**Definition 5** (Pozorovatel stavu)**.** Pozorovatel stavu je systém, který poskytuje odhad vnitřního stavu daného reálného systému z měření vstupu a výstupu reálného systému.

Pozorovatel je obvykle implementován počítačem a poskytuje základ pro řadu praktických aplikací.

Typické úlohy

- Kompenzace vlivu poruchových veličin (angl. *Disturbance Rejection*)
- Problém regulátoru (angl. *Regulator Problem*)
- Problém sledování (angl. *Tracking Problem*)
- Optimální řízení (angl. *Optimal Control*)

Na systém vždy působí celá řada poruchových veličin.

Poruchová veličina *měřitelná* $\Rightarrow$ její vliv lze kompenzovat v řídicím členu. Někdy lze vliv poruchy kompenzovat beze zbytku.

*Řízený systém je invariantní vzhledem k poruše:* porucha se na výstupu systému vůbec neprojeví.

Dynamické vlastnosti samotného systému jsou někdy nevyhovující.

Účelem je navrhnout takovou strukturu řízení, aby celý systém měl vyhovující dynamické vlastnosti.

Často jde o *stabilizaci* systému, jenž je nestabilní.

Požadujeme, aby $\mathbf{y}(t)$ co nejlépe sledovalo referenční průběh $\mathbf{w}(t)$.

Minimalizace regulační odchylky $\mathbf{e}(t)$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)$$

*Dodatečná omezení:*

- velikost řídicí veličiny,
- velikost celkové řídicí energie, ...

V moderní teorii řízení jsou všechny požadavky na řízení shrnuty do *kritéria kvality řízení* $J$.

Návrh řídicího zásahu → optimalizační problém minimalizace $J$.

Dva zásadní problémy:

- volba kritéria kvality řízení,
- řešitelnost takto formulovaného optimalizačního problému.

Nejvíce používaným kritériem kvality řízení je *kvadratické kritérium*

$$J = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{x} + \cdots$$

Pro lineární systémy vede na *lineární zákon řízení*

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

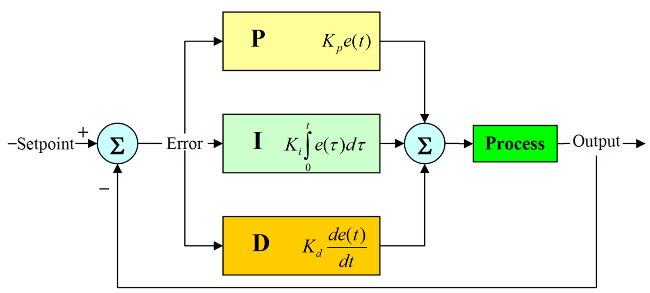
kde $\mathbf{K}$ je matice, kterou lze spočítat z tzv. *Ricattiho rovnice*.

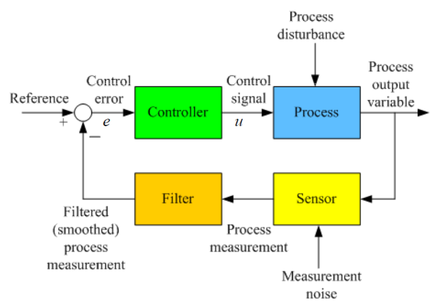
Optimalizace: Snaha dosáhnout určitého cíle (minimalizace nákladů, maximalizace výdělku, minimalizace cestovní doby)

**Definition 6** (Bellmanův princip optimality)**.** Optimální řídicí strategie má tu vlastnost, že bez ohledu na počáteční stav a původní rozhodnutí představují ostatní rozhodnutí opět optimální strategii s ohledem na stav, vyplývající z prvního rozhodnutí.

Lze tedy postupovat zpětně (tzv. angl. *backtracking* nebo angl. *rollout*)

$$u(t) = u_0 + \underbrace{K_{\mathrm{p}} e(t)}_{u_{\mathrm{p}}} + \underbrace{\frac{K_{\mathrm{p}}}{T_{\mathrm{i}}} \int_0^t e(\tau)\, \mathrm{d}\tau}_{u_{\mathrm{i}}} + \underbrace{K_{\mathrm{p}} T_{\mathrm{d}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t)}_{u_{\mathrm{d}}}$$



## *Model-prediktivní řízení*

**Idea:** Použijeme model systému k posouzení budoucích dopadů současných akcí.

- dnes velmi rozvinuté regulační paradigma
- základ: 1970tá léta, Shell Oil, petrochemie
- důvod: úspora nákladů, lze se více přiblížit mezním parametrům

Hlavní účel, proč jsou tyto modely sestavovány, je možnost předpovědět, jak se za daných podmínek chová námi sledovaný systém. Z toho můžeme vyvodit hodnoty řídicích proměnných tak, abychom dosáhli optimálního stavu. Tato metoda se nazývá *prediktivní řízení na základě modelu* (anglicky *Model Predictive Control*, zkráceně MPC[3]).

[3]

Míra optimality stavu systému $\mathcal{S}$ je většinou vyjádřena kritériem $J(\mathcal{S})$, funkcí přiřazující množině stavových a řídicích proměnných reálnou hodnotu. Optimalizace odpovídá minimalizaci tohoto kritéria. Dosažení optima v jednom časovém bodě může evidentně připravit špatné počáteční podmínky pro budoucí vývoj a vést tak k nestabilitě. K odstranění tohoto efektu optimalizujeme v rámci delšího časového horizontu[4]. Minimalizace neprobíhá pouze pro následující časový krok $k+1$, ale přes horizont — stanovený počet budoucích časových kroků $k+1, k+2, \ldots, k+h$. K řízení je vždy použita pouze první hodnota optimálních řídicích proměnných $u[k]$.

[4] ; and

Nadále bude označovat $\mathbf{s}[h|k]$ vektor odhadů všech stavových i řídicích proměnných od časového kroku $k$ na horizontu délky $h$, tedy po časový krok $k+h$. Pokud je $\mathbf{x}[k] \in \mathbb{R}^l$ a $\mathbf{u}[k] \in \mathbb{R}^m$, bude mít vektor $\mathbf{s}[h|k]$ tvar

$$\mathbf{s}[h|k] = (\hat{x}_1[k|k], ..., \hat{x}_l[k|k], \hat{u}_1[k|k], ..., \hat{u}_m[k|k], ..., \tag{1}$$

$$\hat{x}_1[k+h|k], ..., \hat{x}_l[k+h|k], \hat{u}_1[k+h-1|k], ..., \hat{u}_m[k+h-1|k])^{\mathrm{T}} . \tag{2}$$

Symbol $\hat{x}_i[l|k]$ označuje odhad proměnné $x_i[l]$ v čase $t_l$ na základě stavu systému v čase $t_k$. Evidentně platí $\hat{x}_i[k|k] = x_i[k]$.

V každém okamžiku vzorkování $k$ používáme

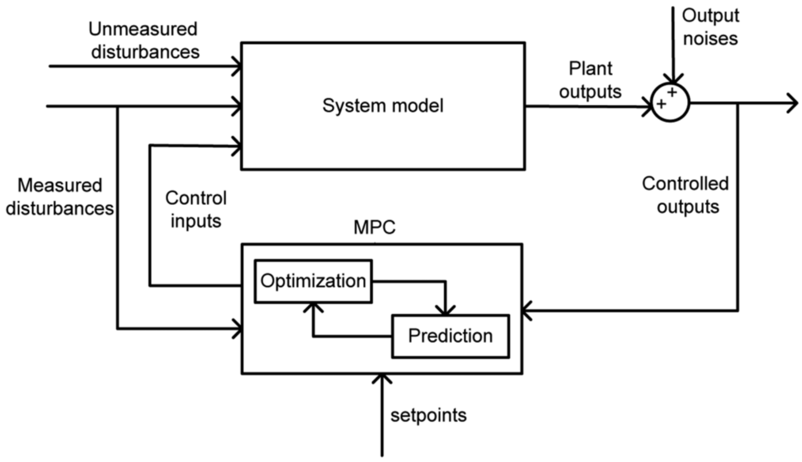
1. matematický model řízené soustavy dynamický model, omezující podmínky
2. (konečnou) historii hodnot regulovaných veličin až po $k$-tou
3. (konečnou) historii hodnot řízení
4. požadovaný průběh regulovaných veličin v rámci uvažovaného horizontu predikce $h$

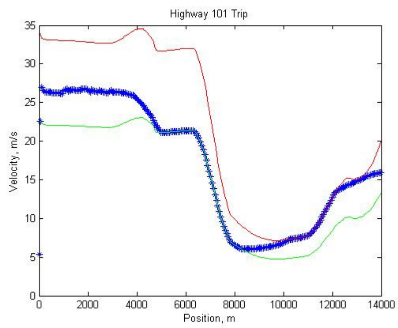
Máme:

- *stavový vektor* v kroku $k$, $\mathbf{x}[k]$,
- *diskrétní model* $\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = f(k, \mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k]) \\ \mathbf{y}[k] = g(k, \mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k]) \end{cases}$

Vektor vstupů $\mathbf{u}[k]$ minimalizuje **ztrátovou funkci** $J(\mathbf{x}[k])$

- jednokroková minimalizace $J(\mathbf{x}[k])$ není globálně optimální
- použijeme model systému pro $h$-krokovou predikci $\mathbf{x}[k+1], \ldots, \mathbf{x}[k+h]$
- rozšíříme $\mathbf{x}[k]$ na $\mathbf{x}[h|k] = [\mathbf{x}[k]; \mathbf{x}[k+1]; \ldots; \mathbf{x}[k+h]]$
- počítáme $J(\mathbf{x}[h|k])$ pro $h$ kroků

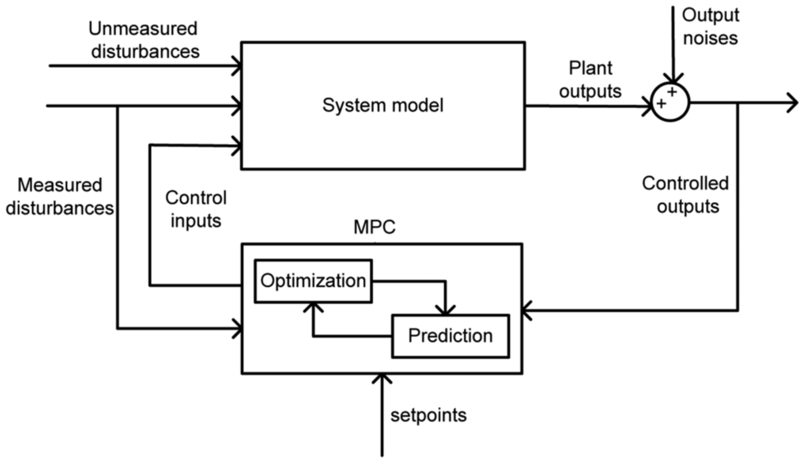


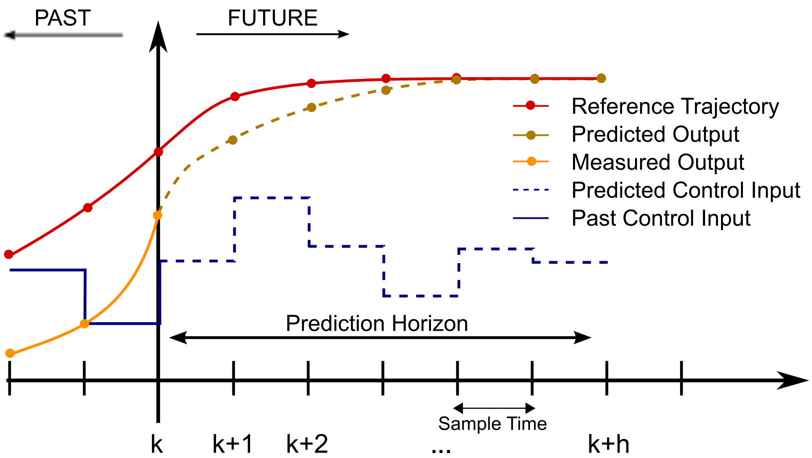





- Návrh MPC řadiče nad ACC, regulujícího požadovanou rychlost tak, aby vozidlo jelo co nejhospodárněji
- Predikce: maximální + minimální rychlost dopravy, sklon
- Omezení: maximální + minimální rychlost dopravy a vozidla

Převzato z Borelli: ME290E a Balandat: EE128

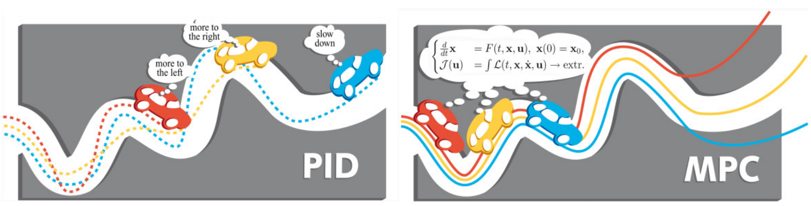


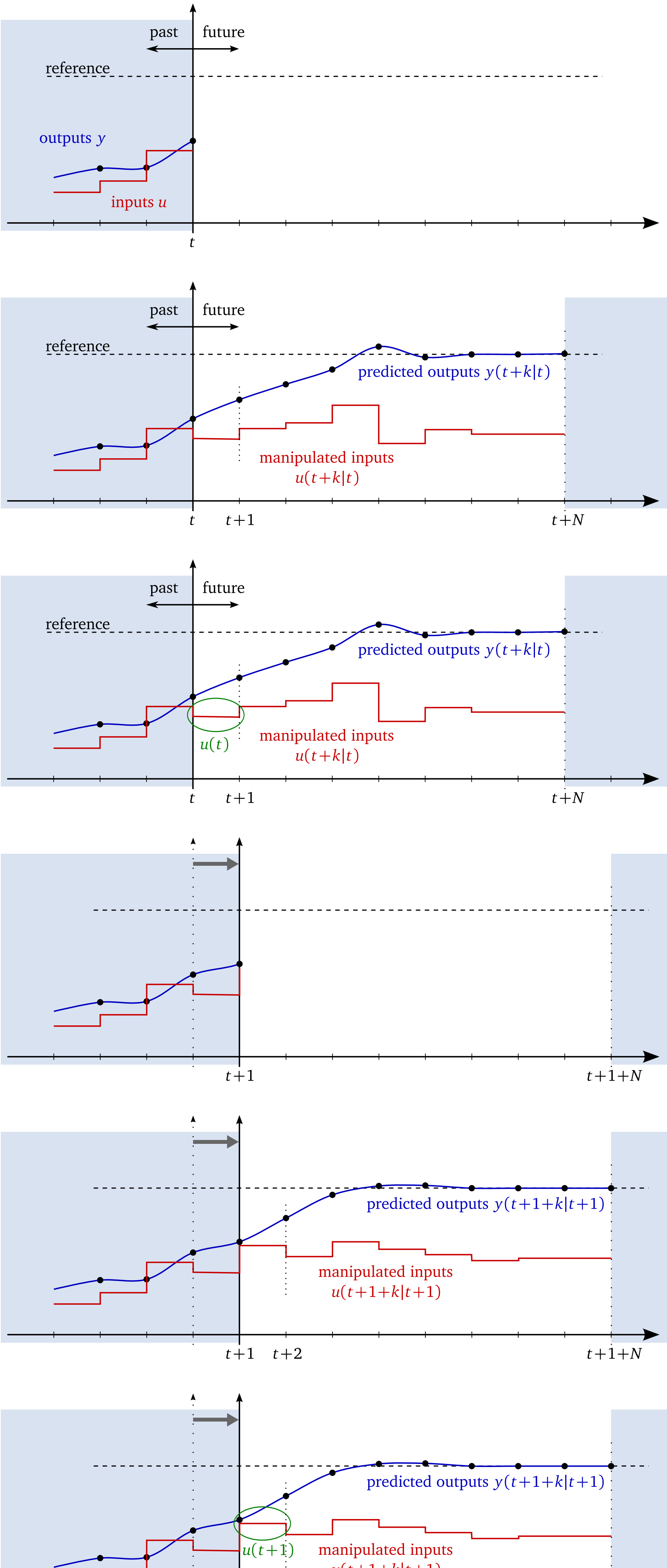

- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky $N$
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$
- Optimalizace používá současná měření $\rightarrow$ **zpětná vazba**

MPC reaguje na predikovanou budoucí hodnotu regulačních odchylek

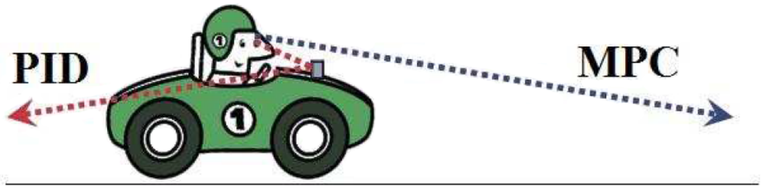
PID reaguje jen na současné a minulé hodnoty.




Používat PID je jako řídit auto na základě pohledu do zpětného


past
future
reference
outputs $y$
inputs $u$
$t$
past
future
reference
predicted outputs $y(t+k|t)$
manipulated inputs
$u(t+k|t)$
$t$
$t+1$
$t+N$
past
future
reference
predicted outputs $y(t+k|t)$
$u(t)$
manipulated inputs
$u(t+k|t)$
$t$
$t+1$
$t+N$
$t+1$
$t+1+N$
predicted outputs $y(t+1+k|t+1)$
manipulated inputs
$u(t+1+k|t+1)$
$t+1$
$t+2$
$t+1+N$
predicted outputs $y(t+1+k|t+1)$
$u(t+1)$
manipulated inputs

zrcátka (Hlava, 2007).




Omezení hodnot akčních veličin:

$$u_{\min} \leq u[k+p|k] \leq u_{\max}, \qquad p = 0, 1, \ldots, h$$

Omezení hodnot přírůstků akčních veličin:

$$\left|\Delta u[k+p|k]\right| \leq \Delta u_{\max}, \qquad p = 0, 1, \ldots, h$$

Omezení hodnot regulovaných veličin:

$$y_{\min} \leq y[k+p|k] \leq y_{\max}, \qquad p = h, n+1, \ldots, N$$

- mohou být obecně také proměnná v čase,
- u regulovaných veličin → ± *prázdná množina přípustných řešení*

## *Reference*

HAVLENA, Vladimír a Jan ŠTECHA. *Moderní teorie řízení*. Skriptum ČVUT FEL. Praha : Ediční středisko ČVUT, 1999, 297 s.

JAMES, Garreth a Deborah WITTEN a Trevor HASTIE a Robert TIBSHIRANI. *An introduction to statistical learning*. New York : Springer, 2003, 000 s.

ŠTECHA, Jan a Vladimír HAVLENA. *Teorie dynamických systémů*. Skriptum ČVUT FEL. Praha : Ediční středisko ČVUT, 2005, 254 s.