Řízení a optimalizace
Stavové modely a model-prediktivní řízení

Matematické metody pro ITS (11MAMY)

Jan Přikryl

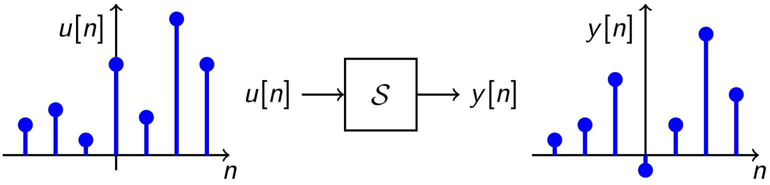
Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

2. přednáška 11MAMY
úterý 27. února 2018

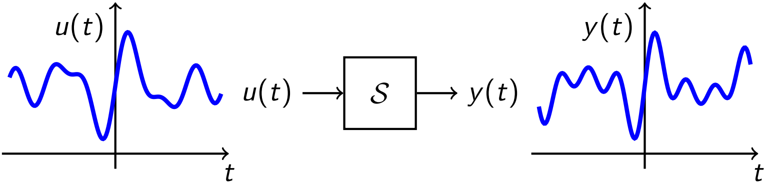
verze: 2018-02-28 09:46

Obsah přednášky

Vnější popis diskrétního systému



Vnější popis spojitého systému



Obsah přednášky

Vnitřní popis systému

Nelineární systém

Spojitý systém	Diskrétní systém
vstup $\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{u}[n]$
stav $\mathbf{x}(t)$	$\mathbf{x}[n]$
výstup $\mathbf{y}(t)$	$\mathbf{y}[n]$
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{f}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	$\mathbf{y}[n] = \mathbf{g}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$

Vnitřní popis systému

Lineární nestacionární systém

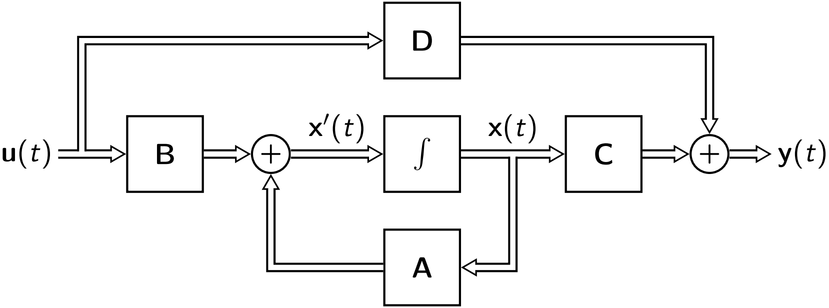
Spojitý systém	Diskrétní systém
$\mathbf{u}(t)$ . . . vstup $\mathbf{x}(t)$ . . . stav $\mathbf{y}(t)$ . . . výstup	$\mathbf{u}[n]$ $\mathbf{x}[n]$ $\mathbf{y}[n]$
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}[n]\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}[n]\,\mathbf{u}[n]$ $\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n]\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}[n]\,\mathbf{u}[n]$

Vnitřní popis systému

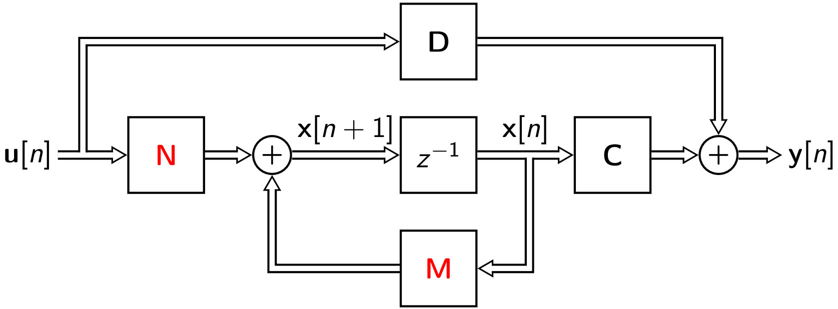
Stacionární (LTI) systém

Spojitý systém	**Diskrétní systém**
$\mathbf{u}(t)$ . . . vstupní (řídicí) vektor $\mathbf{x}(t)$ . . . stavový vektor $\mathbf{y}(t)$ . . . výstupní vektor	$\mathbf{u}[n]$ . . . vstupní (řídicí) vektor $\mathbf{x}[n]$ . . . stavový vektor $\mathbf{y}[n]$ . . . výstupní vektor
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,\mathbf{u}[n]$ $\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{u}[n]$
$\mathbf{A}$ je matice systému $(n \times n)$ $\mathbf{B}$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$ $\mathbf{C}$ je výstupní matice $(m \times n)$ $\mathbf{D}$ je výstupní matice $(m \times r)$	$\mathbf{M}$ je matice systému $(n \times n)$ $\mathbf{N}$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$ $\mathbf{C}$ je výstupní matice $(m \times n)$ $\mathbf{D}$ je výstupní matice $(m \times r)$

Vnitřní popis spojitého systému



Vnitřní popis diskrétního systému



Obsah přednášky

Cykloida

Pohyb po **cykloidě** je popsán parametrickou soustavou rovnic

$$x = x_1(t) = a\,t - d\sin t,$$
$$y = x_2(t) = a - d\cos t,$$

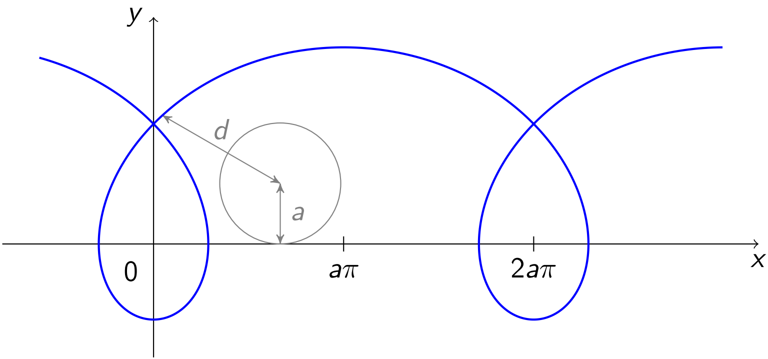
která je pro počáteční podmínky

$$x_1(0) = 0 \quad \text{a} \quad x_2(0) = a - d$$

dána řešením stavové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} t.$$

Obrázek cykloidy



Vlci a ovečky

Nelineární stavový model **vlci a ovečky**, který je znám v literatuře jako *Lotka-Volterra predator-prey model*, se týká populace ovcí popsané stavovou proměnnou $x_1(t)$ a populace vlků popsané stavovou proměnnou $x_2(t)$.

Dynamický model je dán nelineární soustavou stavových rovnic

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_1(t) &= a\, x_1(t) - b\, x_1(t) x_2(t), \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_2(t) &= -c\, x_2(t) + d\, x_1(t) x_2(t).
\end{aligned}
$$

Vlci a ovečky

Interpretace modelu

Uvedený model můžeme snadno interpretovat. Žijí-li ovce a vlci odděleně, pro ovce platí rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) = a\,x_1(t),$$

jejímž řešením je exponenciální růst

$$x_1(t) = x_1(0)\,\mathrm{e}^{at},$$

zatímco bez potravy je přírůstek populace vlků záporný

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = -c\,x_2(t)$$

a vlci hynou,

$$x_2(t) = x_2(0)\,\mathrm{e}^{-ct}.$$

Vnitřní popis nelineárního spojitého systému

Vlci a ovečky

Počet sežraných ovcí a nasycených vlků je úměrný počtu jejich setkání – ten je dán součinem

$$x_1(t)x_2(t)$$

a počet ovcí klesá úměrně s

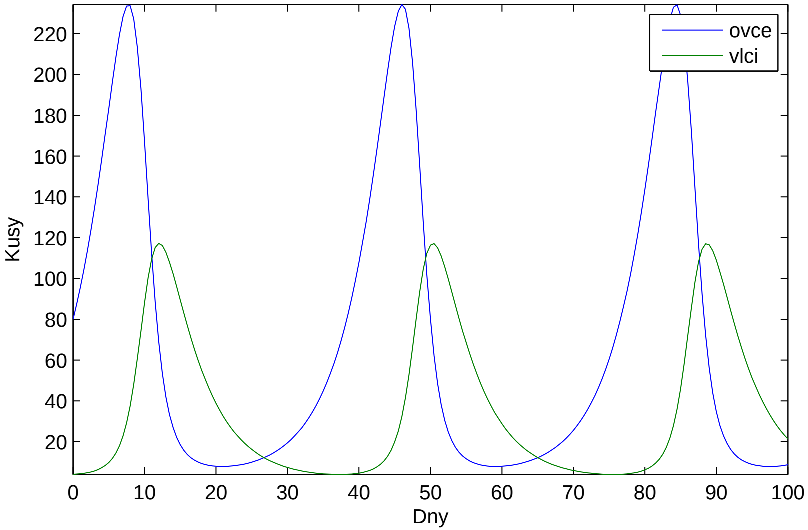
$$-b\,x_1(t)x_2(t)$$

zatímco se vlci mají dobře a jejich počet stoupá úměrně s

$$d\,x_1(t)x_2(t).$$

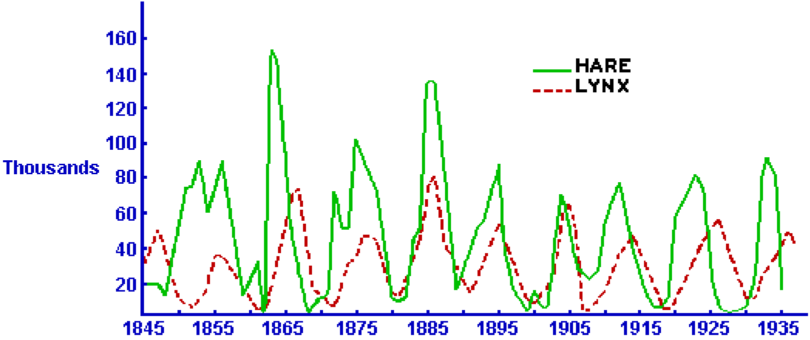
Vnitřní popis nelineárního spojitého systému

Výstup modelu



Vnitřní popis nelineárního spojitého systému

Reálná data populací rysů a sněžných zajíců v Kanadě



Obsah přednášky

Úrovně modelování

Typy modelů podle úrovně znalostí systému

V nějakých případech jsme schopni přesně matematicky popsat chování celého systému.

V případě složitých systémů s mnoha neurčitými vazbami to však tak jednoduché není.

Podle toho, kolik informací o modelovaném systému máme, lze modely dělit do tří skupin:

- white-box
- gray-box
- black-box

White-box

Přesný model systému

Zcela odvozeny ze základních zákonů fyziky, chemie, ekonomie, ... (first-principle models).

Všechny rovnice a parametry lze určit na teoretické úrovni.

Také kombinace modelů, i v případě, že některé parametry odhadnuty z dat.

Charakteristická vlastnost: nezávislé na datech, parametry přímo interpretovatelné jako základní veličiny (hmotnost, rychlost, národní důchod, ...).

Black-box

Modelování z dat

Zcela závislé na měřených datech.

Jak **struktura modelu**, tak i **parametry** jsou odvozeny experimentálně.

Nevyužíváme žádnou apriorní informaci o modelovaném systému.

Parametry typicky nemají žádný vztah k základním veličinám.

Black-box

Modelování z dat

Algoritmy strojového učení s učitelem: Známe vstupní a výstupní data, použijeme generický model, jehož parametry nastavíme.

Vyžaduje trénovací a testovací data

Velmi rozšířené v inženýrské praxi

Příklad: AR (autoregresní modely), ANN (neronové sítě), SVM (support vector machines), GP (Gaussovské procesy)

Dělíme na

- parametrické
- neparametrické

Black-box

Parametrické modely

Parametrické modely předpokládají existenci konečné množiny parametrů θ. Jakmile jednou najdeme parametry, budoucí predikce modelu x nezávisí na množině právě pozorovaných dat $\mathcal{D}$, je tedy

$$P(x|\theta, \mathcal{D}) = P(x|\theta).$$

Složitost modelu je ohraničená, i když množství pozorovaných dat ohraničené není.

Tyto modely nejsou flexibilní.

Black-box

Neparametrické modely

Neparametrické modely nepředpokládají, že data lze reprezentovat distribuční funkcí založenou na konečné množině parametrů. Mnohdy je ale definujeme ze předpokladu, že θ má nekonečnou dimenzi. Typicky je θ nějaká funkce.

V tomto případě může θ obsáhnout rostoucí objem informace o datech tak, jak $\mathcal{D}$ roste.

Tyto modely jsou složitější, ale zato jsou flexibilní.

Black-box

Bayesovské neparametrické modely

Jednoduchý nástroj na modelování složitých vztahů v datech.

BIG DATA!

Příklady

Parametrické	Neparametrické	Aplikace
polynomiální regrese	Gaussovský proces	aproximace fcí
logistická regrese	GP klasifikátor	klasifikace
směsové modely, k-means	směs Dirichletovských procesů	shlukování
skryté Markovské modely	nekonečné HMM	časové řady
faktorová analýza, PCA, PMF	nekonečné latentní FM	hledání příznaků

Gray-box

Některé neznámé části

Kompromis / kominace mezi white-box a black-box modelem. Možné jsou všechny možné kombinace.

Jeho popis může obsahovat také kvalitativní informace o modelovaném systému, např. popis chování systému ve formě pravidel.

Charakteristika: slučuje všechny možné snadno dostupné zdroje informací o systému.

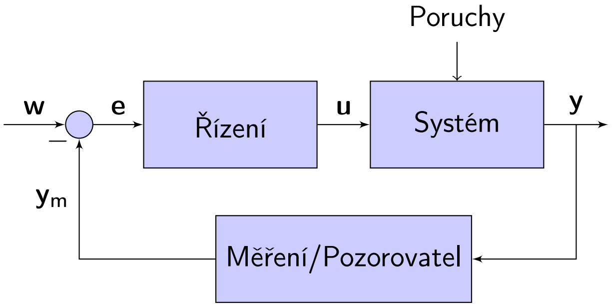
Struktura modelu bývá odvozena z expertních znalostí, **parametry** modelu jsou ale určeny z dat.

White-box

Přesný model systému

	White-box	Gray-box	Black-box
Zdroje informací	základní principy znalosti	kvalitativní znalosti pravidla částečné znalosti a data	experimenty data
Vlastnosti	dobrá extrapolace dobré pochopení vyzoká spolehlivost škálovatelnost		krátká doba vývoje nevyžaduje expertní znalosti lze i pro neznámé procesy
Nevýhody	časově náročné vyžaduje znalosti znalosti omezují přesnost pouze pro známé procesy		nelze extrapolovat není škálovatelné přesnost omezena daty málo pochopení
Aplikační oblasti	plánování konstrukce, design spíše jednoduché procesy		pouze pro existující procesy spíše složité procesy

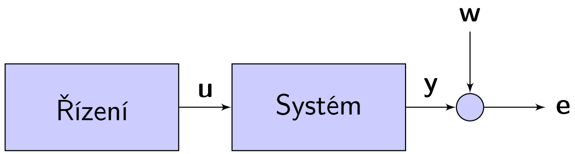
Obsah přednášky


Poruchy
w
e
Řízení
u
Systém
y
—
ym
Měření/Pozorovatel

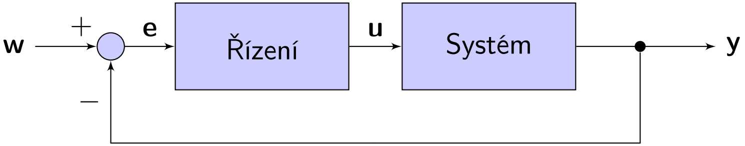
Základní typy řízení

Ovládání a regulace

Ovládání:



Regulace:



Dosažitelnost, řiditelnost

Definice (Dosažitelnost)

Stav $\mathbf{x}$ je dosažitelný, existuje-li řízení $\mathbf{u}(t)$, které za konečný čas převede počáteční stav $\mathbf{x}(t_0) = 0$ do stavu $\mathbf{x}$. Jsou-li všechny stavy systému dosažitelné, říkáme, že systém je dosažitelný.

Definice (Řiditelnost stavu)

Stav $\mathbf{x}$ je řiditelný, existuje-li řízení $\mathbf{u}(t)$, které v konečném čase převede tento stav do počátku (do nulového stavu). Jsou-li všechny stavy systému řiditelné, říkáme, že systém je řiditelný.

Definice (Řiditelnost na výstupu)

Systém je řiditelný na výsupu, pokud existuje funkce řízení $\mathbf{u}(t)$ taková, že převede výstup $\mathbf{y}(t_0)$ na $\mathbf{y}(t_1)$ v konečném čase $t_1 - t_0$.

Pozorovatelnost

Definice (Pozorovatelnost)

Systém je pozorovatelný, když změřením vstupu a výstupu na konečném časovém intervalu je možno určit hodnotu stavu systému na počátku měření.

Měřením lze zjistit vlastnosti pouze u pozorovatelné části systému.

Definice (Pozorovatel stavu)

Pozorovatel stavu je systém, který poskytuje odhad vnitřního stavu daného reálného systému z měření vstupu a výstupu reálného systému.

Pozorovatel je obvykle implementován počítačem a poskytuje základ pro řadu praktických aplikací.

Řízení systémů

Požadavky kladené na řízení

Typické úlohy

- Kompenzace vlivu poruchových veličin
  (angl. *Disturbance Rejection*)
- Problém regulátoru
  (angl. *Regulator Problem*)
- Problém sledování
  (angl. *Tracking Problem*)
- Optimální řízení
  (angl. *Optimal Control*)

Řízení systémů

Kompenzace vlivu poruchových veličin

Na systém vždy působí celá řada poruchových veličin.

Poruchová veličina měřitelná $\Rightarrow$ její vliv lze kompenzovat v řídicím členu. Někdy lze vliv poruchy kompenzovat beze zbytku.

Řízený systém je invariantní vzhledem k poruše: porucha se na výstupu systému vůbec neprojeví.

Řízení systémů

Problém regulátoru

Dynamické vlastnosti samotného systému jsou někdy nevyhovující.

Účelem je navrhnout takovou strukturu řízení, aby celý systém měl vyhovující dynamické vlastnosti.

Často jde o stabilizaci systému, jenž je nestabilní.

Řízení systémů
Problém sledování

Požadujeme, aby $\mathbf{y}(t)$ co nejlépe sledovalo referenční průběh $\mathbf{w}(t)$.

Minimalizace regulační odchylky $\mathbf{e}(t)$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)$$

Dodatečná omezení:

- velikost řídicí veličiny,
- velikost celkové řídicí energie, . . .

Řízení systémů

Optimální řízení

V moderní teorii řízení jsou všechny požadavky na řízení shrnuty do kritéria kvality řízení J.

Návrh řídicího zásahu $\rightarrow$ optimalizační problém minimalizace J.

Dva zásadní problémy:

- volba kritéria kvality řízení,
- řešitelnost takto formulovaného optimalizačního problému.

Nejvíce používaným kritériem kvality řízení je kvadratické kritérium

$$J = \mathbf{x}^{\mathsf{T}}\mathbf{R}\mathbf{x} + \cdots$$

Pro lineární systémy vede na lineární zákon řízení

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

kde $\mathbf{K}$ je matice, kterou lze spočítat z tzv. *Ricattiho rovnice*.

Bellmanova funkce

Základ dynamického programování

Optimalizace: Snaha dosáhnout určitého cíle (minimalizace nákladů, maximalizace výdělku, minimalizace cestovní doby)

Definice (Bellmanův princip optimality)

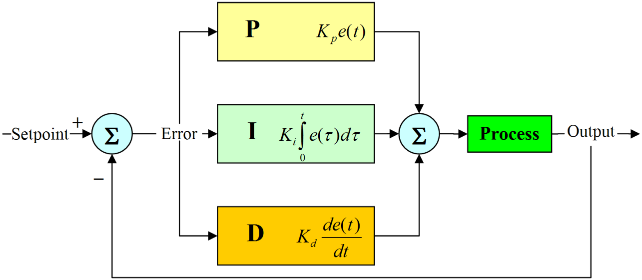
Optimální řídicí strategie má tu vlastnost, že bez ohledu na počáteční stav a původní rozhodnutí představují ostatní rozhodnutí opět optimální strategii s ohledem na stav, vyplývající z prvního rozhodnutí.

Lze tedy postupovat zpětně (tzv. angl. *backtracking* nebo angl. *rollout*)

PID řízení

Proporcionální, integrální a derivační složka

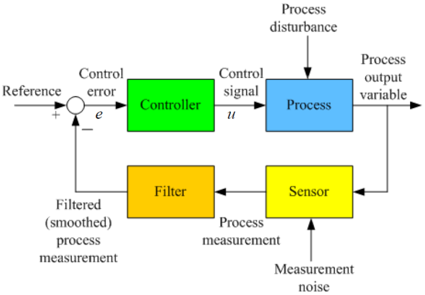
$$u(t) = u_0 + \underbrace{K_\mathrm{p} e(t)}_{u_\mathrm{p}} + \underbrace{\frac{K_\mathrm{p}}{T_\mathrm{i}} \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{u_\mathrm{i}} + \underbrace{K_\mathrm{p} T_\mathrm{d} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t)}_{u_\mathrm{d}}$$



PID řízení

Proporcionální, integrální a derivační složka

$$u(t) = u_0 + \underbrace{K_\mathrm{p} e(t)}_{u_\mathrm{p}} + \underbrace{\frac{K_\mathrm{p}}{T_\mathrm{i}} \int_0^t e(\tau)\, \mathrm{d}\tau}_{u_\mathrm{i}} + \underbrace{K_\mathrm{p} T_\mathrm{d} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t)}_{u_\mathrm{d}}$$



Obsah přednášky

Model-prediktivní řízení

Prediktivní řízení založené na modelu

Idea: Použijeme model systému k posouzení budoucích dopadů současných akcí.

- dnes velmi rozvinuté regulační paradigma
- základ: 1970tá léta, Shell Oil, petrochemie
- důvod: úspora nákladů, lze se více přiblížit mezním parametrům

Model-prediktivní řízení

Princip

V každém okamžiku vzorkování k používáme

1. matematický model řízené soustavy
   dynamický model, omezující podmínky
2. (konečnou) historii hodnot regulovaných veličin až po k-tou
3. (konečnou) historii hodnot řízení
4. požadovaný průběh regulovaných veličin
   v rámci uvažovaného horizontu predikce h

Model-prediktivní řízení

Trochu matematiky

Máme:

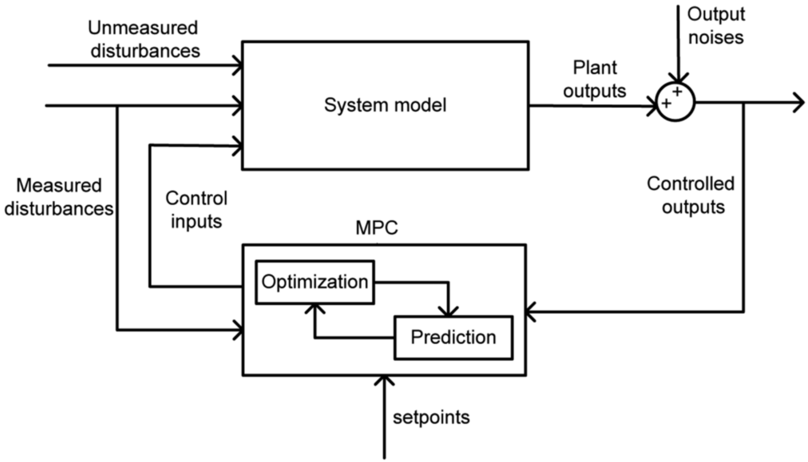
- *stavový vektor* v kroku k, $\mathbf{x}[k]$,
- *diskrétní model* $\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = f(k, \mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k]) \\ \mathbf{y}[k] = g(k, \mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k]) \end{cases}$

Vektor vstupů $\mathbf{u}[k]$ minimalizuje **ztrátovou funkci** $J(\mathbf{x}[k])$

- jednokroková minimalizace $J(\mathbf{x}[k])$ není globálně optimální
- použijeme model systému pro h-krokovou predikci $\mathbf{x}[k+1], \ldots, \mathbf{x}[k+h]$
- rozšíříme $\mathbf{x}[k]$ na $\mathbf{x}[h|k] = [\mathbf{x}[k]; \mathbf{x}[k+1]; \ldots; \mathbf{x}[k+h]]$
- počítáme $J(\mathbf{x}[h|k])$ pro h kroků

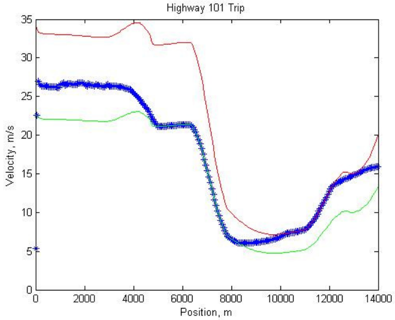
Model-prediktivní řízení

Neúplné blokové schéma



Model-prediktivní řízení

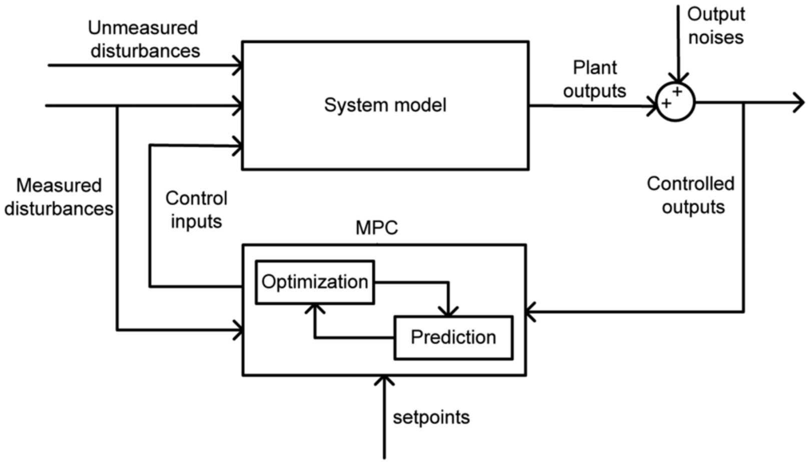
Audi Smart Engine



- Návrh MPC řadiče nad ACC, regulujícího požadovanou rychlost tak, aby vozidlo jelo co nejhospodárněji
- Predikce: maximální + minimální rychlost dopravy, sklon
- Omezení: maximální + minimální rychlost dopravy a vozidla

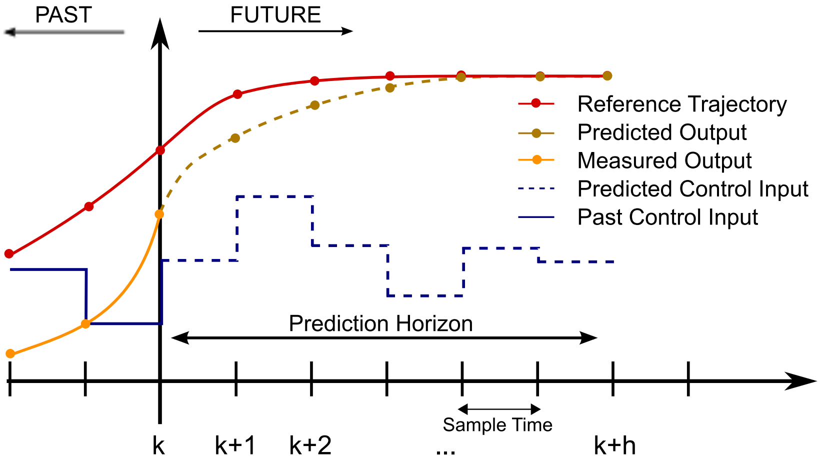
Model-prediktivní řízení

Neúplné blokové schéma



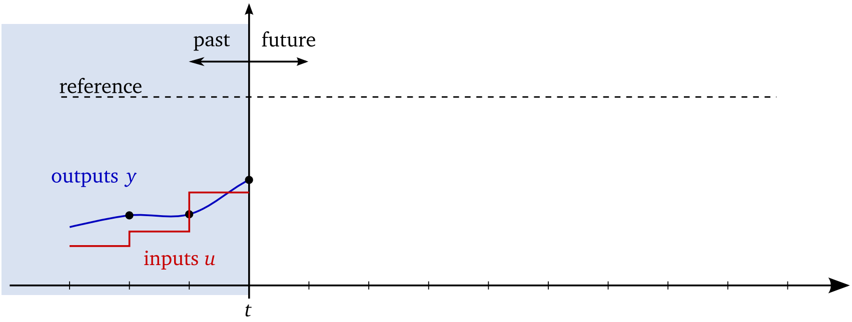
Model-prediktivní řízení

Průběh vstupů



Model-prediktivní řízení

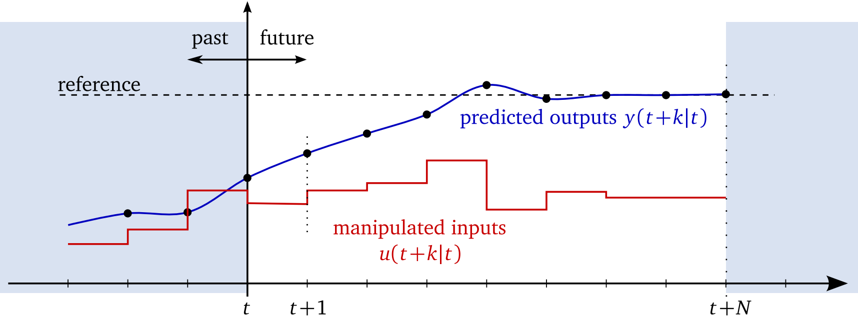
Jeden krok



- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$
- Optimalizace používá současná měření → **zpětná vazba**

Model-prediktivní řízení

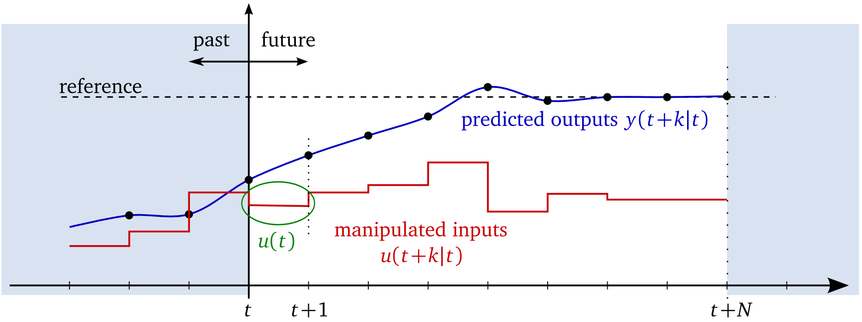
Jeden krok



- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$
- Optimalizace používá současná měření → zpětná vazba

Model-prediktivní řízení

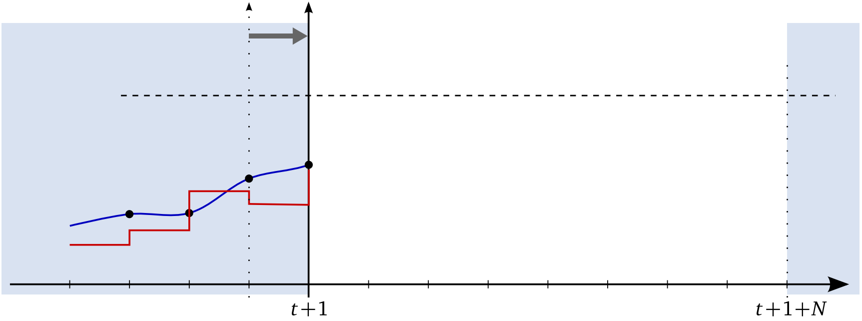
Jeden krok



- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$
- Optimalizace používá současná měření → zpětná vazba

Model-prediktivní řízení

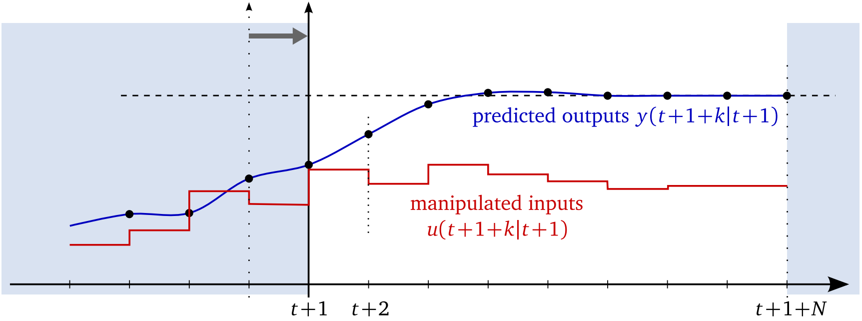
Jeden krok



- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$
- Optimalizace používá současná měření → zpětná vazba

Model-prediktivní řízení

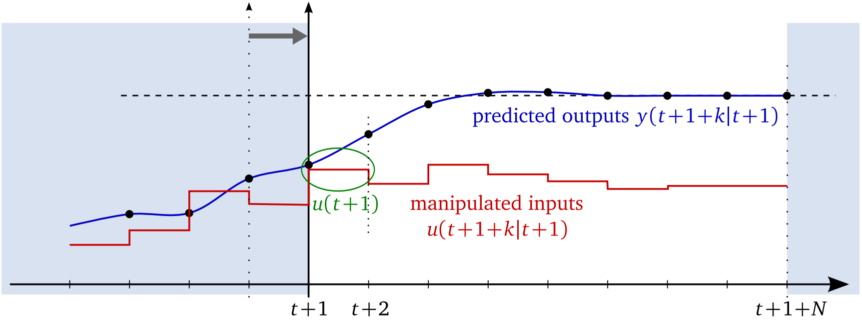
Jeden krok



- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$
- Optimalizace používá současná měření → zpětná vazba

Model-prediktivní řízení

Jeden krok



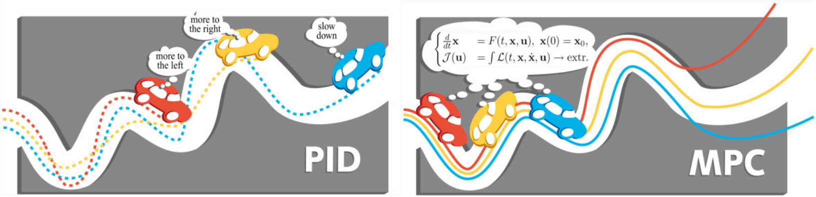
- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$
- Optimalizace používá současná měření → **zpětná vazba**

Model-prediktivní řízení

MPC versus PID

MPC reaguje na predikovanou budoucí hodnotu regulačních odchylek

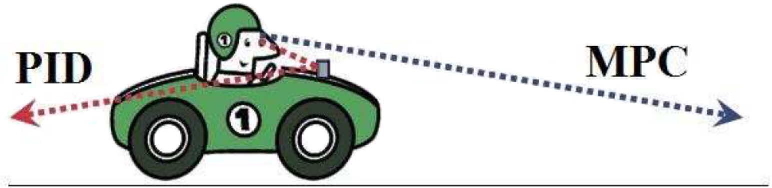
PID reaguje jen na současné a minulé hodnoty.



Model-prediktivní řízení

MPC versus PID

Používat PID je jako řídit auto na základě pohledu do zpětného zrcátka (Hlava, 2007).



Model-prediktivní řízení

Nejdůležitější typy omezujících podmínek

Omezení hodnot akčních veličin:

$$u_{\mathrm{min}} \leq u[k+p|k] \leq u_{\mathrm{max}}, \qquad p = 0, 1, \ldots, h$$

Omezení hodnot přírůstků akčních veličin:

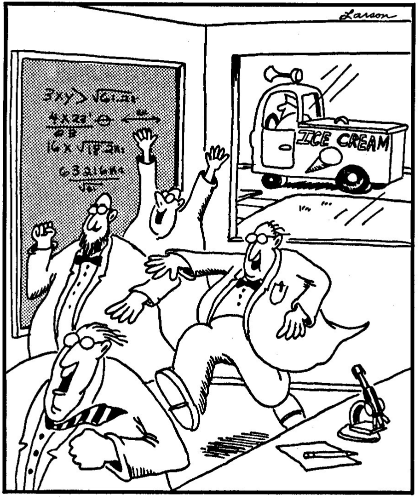
$$\left|\Delta u[k+p|k]\right| \leq \Delta u_{\mathrm{max}}, \qquad p = 0, 1, \ldots, h$$

Omezení hodnot regulovaných veličin:

$$y_{\mathrm{min}} \leq y[k+p|k] \leq y_{\mathrm{max}}, \qquad p = h, n+1, \ldots, N$$

- mohou být obecně také proměnná v čase,
- u regulovaných veličin $\rightarrow$ $\pm$ prázdná množina přípustných řešení

Na závěr



Děkuji za pozornost. Až budete utíkat, prosím opatrně.