Měření dat
Filtrace dat, Kalmanův filtr

Matematické metody pro ITS (11MAMY)

Jan Přikryl

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

3. přednáška 11MAMY
čtvrtek 28. února 2018

verze: 2018-03-21 16:45

Obsah přednášky

Kalmanův filtr
Motivace

Máme signál libovolného typu (měření teploty, zvuk, radarová data o vzdálenosti), tento signál je zašumněný.

Jak odstranit šum?

- Třeba klouzavý průměr – ale z kolika prvků a jaké mají mít váhy?
- V reálném světě to nefunguje.
- Potřebujeme trochu statistiky

Kalmanův filtr
Princip

Princip: Odhad správné hodnoty měřené veličiny je vážený průměr naměřené a modelované hodnoty.

$$\hat{\mathbf{y}}[k] = \mathbf{K}[k]\mathbf{z} + (\mathbf{1} - \mathbf{K}[k])\mathbf{y}[k]$$

Matice $\mathbf{K}[k]$ je časově proměnná, vážený průměr se adaptuje na

- odhad chyby modelované veličiny
- odhad chyby měřené veličiny

Uvažujeme velmi jednoduchý stavový model systému

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}[k]\mathbf{x}[k] + \mathbf{v}[k] \\ \mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}[k]\mathbf{x}[k] + \mathbf{w}[k] \end{aligned}$$

Kalmanův filtr

Kroky

Postupně vykonáváme následující kroky

1. Sestavení dynamického stavového modelu
2. Nastavení parametrů (počáteční podmínky, kovariance)
3. Iterace:
   1. Filtrace (angl. *measurement update*)
   2. Predikce (angl. *time update*)

Kalmanův filtr
Kroky

Postupně vykonáváme následující kroky

1. Sestavení dynamického stavového modelu
2. Nastavení parametrů (počáteční podmínky, kovariance)
3. Iterace:
    1. Predikce (angl. *time update*)
    2. Filtrace (angl. *measurement update*)

Kalmanův filtr

Model lineárního dynamického systému

Nové hodnoty $\mathbf{x}[k+1]$ jsou lineární kombinací

- předchozích hodnot
- řídicího signálu $\mathbf{u}[k]$
- šumu procesu

V mnoha případech je $\mathbf{u}[k] = 0$

Předpokládaná hodnota měření je lineární kombinací

- stavu
- šumu měření

Kalmanův filtr

Entity **A**, **B** a **C** jsou obecně časově proměnné matice.

V mnoha problémech zpracování dat ale

- jde pouze o skalární hodnoty, protože i vnitřní stav je skalární,
- jde o hodnoty konstantní v čase

Z již tak zjednodušeného stavového modelu dynamického systému

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}[k+1] &= \mathbf{A}[k]\mathbf{x}[k] + \mathbf{v}[k] \\
\mathbf{y}[k] &= \mathbf{C}[k]\mathbf{x}[k] + \mathbf{w}[k]
\end{aligned}
$$

Kalmanův filtr

Entity **A**, **B** a **C** jsou obecně časově proměnné matice.

V mnoha problémech zpracování dat ale

- jde pouze o skalární hodnoty, protože i vnitřní stav je skalární,
- jde o hodnoty konstantní v čase

dostaneme zcela primitivní model dynamického SISO systému

$$
\begin{aligned}
x[k+1] &= a\,x[k] + v[k] \\
y[k] &= c\,x[k] + w[k]
\end{aligned}
$$

Kalmanův filtr

Pokud přepíšeme popis modelu do lineární stavové formy (což je ve většině případů možné), potřebujeme pouze nějak zadat **kovariance** (respektive **rozptyl**) šumů $\mathbf{v}[k]$ a $\mathbf{w}[k]$.

Šumy $\mathbf{v}[k]$ i $\mathbf{w}[k]$ jsou

- Gaussovské

$$\mathbf{v}[k] \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q})$$
$$\mathbf{w}[k] \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$$

- navzájem statisticky nezávislé

Kalmanův filtr

V praxi stačí, že oba šumy jsou přibližně normální.

I v případě, kdy kovarianční matice $\mathbf{Q}$ a $\mathbf{R}$ odhadneme pouze nepřesně, algoritmus Kalmanova filtru většinou konverguje ke korektním odhadům.

Základní pravidlo zní: *Jak dobrý je váš odhad šumových parametrů, tak kvalitní dostanete odhady veličiny.*

Kalmanův filtr

Ze zbývajících kroků je nejvíce bolestivé určení $\mathbf{R}$ a $\mathbf{Q}$.

Relativně snadné je určit $\mathbf{R}$, protože obecně jsme si zcela jisti úrovní šumu v okolním prostředí. Stanovit vhodné hodnoty prvků $\mathbf{Q}$ není vůbec jednoduché a neexistuje na to ani vhodná metodika. Většinou se $\mathbf{Q}$ vybírá z několika kandidátů, určených kvalifikovaným odhadem.

Pro zahájení celého procesu potřebujeme znát počáteční stav $\mathbf{x}[0]$ a odhad jeho šumu $\mathbf{P}[0]$.

Kalmanův filtr
Filtrace

Filtrace:

1. aktualizujeme hodnotu Kalmanova zisku

$$\mathbf{K}[k] = \mathbf{P}[k]\mathbf{C}^{\mathsf{T}} \left(\mathbf{C}\mathbf{P}[k]\mathbf{C}^{\mathsf{T}} + \mathbf{R}\right)^{-1}$$

2. korigujeme stav na základě odchylky výstupu modelu $\mathbf{y}[k]$ od měření $\mathbf{z}[k]$

$$\hat{\mathbf{x}}[k] = \mathbf{x}[k] + \mathbf{K}[k]\left(\mathbf{z}[k] - \mathbf{y}[k]\right)$$

3. aktualizujeme kovarianci chyb stavu

$$\mathbf{P}[k] = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}[k]\mathbf{C}\right)\mathbf{P}[k]$$

Kalmanův filtr
Predikce

Predikce:

1. předpovíme stav pro $k+1$ pomocí rovnice vývoje stavu (střední hodnota šumu je nulová, ve stavu se tedy neprojeví nijak)

$$\hat{\mathbf{x}}[k+1] = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}[k] + \mathbf{B}\mathbf{u}[k]$$

2. promítneme současné zašumnění stavu do dalšího kroku kovariance stavu nulová není, navíc máme nenulové $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{P}[k+1] = \mathbf{A}\mathbf{P}[k]\mathbf{A}^{\mathsf{T}} + \mathbf{Q}$$

Výstupem je korigovaný odhad stavu $\hat{\mathbf{x}}[k]$ a predikovaný budoucí stav $\hat{\mathbf{x}}[k+1]$.

Kalmanův filtr
Shrnutí

Kalmanův filtr hledá optimální průměrování pro každý diskrétní časový okamžik. Díky modelu systému má uloženy informace o historii stavu.

Není to signálový filtr, je to **estimátor**. Lze ukázat, že se jedná o rekurzivní Bayesovský estimátor.

Považován za jeden z nejvýznamnějších objevů 20. století.

Plné odvození je netriviální, ale jsou k dispozici implementace pro většinu běžných programovacích jazyků.

Odvozen pro lineární systémy, existují i varianty pro nelineární systémy (EKF, UKF, DD1). Ty jsou však výrazně složitější a pomalejší.