Úvodní informaceMatematické modelování*Matematické metody pro ITS (11MAMY)*

Jan Přikryl, Bohumil Kovář

1. přednáška 11MAMYčtvrtek 26. března 2020verze: 2020-03-26 11:05

Obsah

Tento text je do jisté míry experimentálním pískovištěm na odladění převodu textu prezentace vytvořené v LaTeXové třídě `beamer` do textu vysázeného pomocí `tufte-handout`. Obsah je oproti prezentaci mírně rozšířen o poznámky. Bude se ještě v průběhu semestru měnit, kontrolujte si prosím čas sestavení v záhlaví tohoto souboru.

Cílem předmětu *Matematické metody pro ITS* je seznámit posluchače se základními teoretickými poznatky a postupy, které jsou nezbytné pro matematické modelování jevů v dopravě. Předmět je základním stavebním kamenem navazujících odborných předmětů, které se zabývají detailně jednotlivými aspekty ITS. Měl by studentům poskytnout i základy pro magisterské předměty, jako je teorie řízení, identifikace parametrů systému či modelování stochastických systémů a procesů.

Problematika matematického modelování systémů a procesů je velmi rozsáhlá. Tento text se proto soustřeďuje zejména na oblast modelování lineárních a časově invariantních (LTI) spojitých a diskrétních systémů ve stavové formě a na statistické metodyt učení z naměřených dat (angl. *statistical learning*).

Úvod do matematického modelování systémů

Matematické modelování systémů

Co je to vlastně matematické modelování?

Modely vždy nějakým způsobem popisují naše přesvědčení o tom, jak svět funguje. Modely nás provázejí od nepaměti: například obyčejná mapa je vlastně dvourozměrný model našeho pohledu na krajinu; architekti často studují tvary plánovaných budov na jejich zmenšeninách ze sádry a dřeva, aby zjistili, jak bude objekt působit po zasazení do krajiny. Modely jsou většinou zjednodušením reality, postihují jen to, co nás pro studium daného problému opravdu zajímá. Pro nás nepodstatné detaily model zanedbává (u mapy to například mohou být různé malé detaily, u architektonického modelu potom vnitřní vybavení místností budovy).

Modely popisují naše přesvědčení o tom, jak svět funguje.

Provázejí nás od nepaměti:

- obyčejná mapa je dvourozměrný model pohledu na krajinu,
- modely plánovaných budov ze sádry a dřeva.

Většinou jde o *zjednodušení reality*: postihují jen to, co nás pro studium daného problému opravdu zajímá. Pro nás nepodstatné detaily model zanedbává.

V matematickém modelování naše přesvědčení o fungování světa překládáme do jazyka matematiky.

Má to řadu výhod:

1. Matematika je *velmi přesný jazyk.* Tato přesnost nám pomáhá formulovat myšlenky a identifikovat základní předpoklady pro vytvářený model.
2. Matematika je *výstižný jazyk s dobře definovanými pravidly* pro manipulaci s výrazy.
3. Všechny výsledky, které matematici dokázali v průběhu minulých stovek let *jsou nám k dispozici* a můžeme je pro náš model využít.
4. K provedení numerických výpočtů *můžeme dnes použít počítače*.

Modelování je umění kompromisu

Hned na úvod je vhodné zdůraznit to, co jsme už zmínili výše: značnou část matematického modelování tvoří kompromisy. Většina systémů, jež na sebe v reálném světě působí, je totiž příliš složitých na to, abychom je mohli modelovat v plném rozsahu a mnohdy to ani není možné, protože potřebné jemné detaily fungování modelovaného systému ani neznáme. Proto je prvním stupněm kompromisu snaha *identifikovat nejdůležitější části systému* – ty budou do modelu zahrnuty, zbytek bude zanedbán.

Druhá úroveň kompromisu se týká množství matematických operací, které má smysl při modelování provádět: I když matematika má potenciál v naprosté obecnosti dokázat různé výsledky, tyto výsledky závisí kriticky na formě použitých rovnic. Malé změny ve struktuře rovnic přitom mohou vyžadovat obrovské změny v matematických metodách, použitých k jejich řešení. Použijeme-li k manipulaci s rovnicemi vytvářeného modelu počítač, nemusí to sice vést k elegantním výsledkům, ale je to mnohem odolnější vůči změnám. ■**vůči změnám? tenhle konec je nesrozumitelný**■

Značnou část matematického modelování tvoří *kompromisy*.

Většina reálných systémů je příliš složitá.

Kompromis #1: Snaha *identifikovat nejdůležitější části systému* – ty budou do modelu zahrnuty, zbytek bude zanedbán.

Matematicky lze v naprosté obecnosti dokázat mnoho, ale použitelnost výsledků závisí kriticky na formě použitých rovnic. K jejich vyčíslení používáme *počítače*, a ty *nejsou nikdy zcela přesné*.

Kompromis #2: Použijeme-li k manipulaci s rovnicemi vytvářeného modelu počítač, nemusí to sice vést k elegantním výsledkům, ale je to mnohem odolnější vůči změnám.

Jaké cíle může modelování dosáhnout?

Pro použití matematického modelu je v praxi celá řada různých důvodů a model používáme jako prostředek k dosažení různých cílů. Jak dobře je přitom nějakého určitého cíle dosaženo, to závisí jak na stavu našich znalostí o modelovaném systému, tak i na tom, jak dobře tento systém modelujeme.

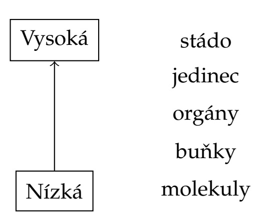
Příklady řady cílů jsou:

1. *Rozvoj vědeckého poznání* – prostřednictvím kvantitativního vyjádření současných znalostí o systému (stejně jako znázornit to, co víme, můžeme také ukázat, co nevíme);
2. *Testování* vlivu změn v systému
3. Získat *informace pro podporu rozhodování*, včetně
   (a) taktických rozhodnutí manažerů
   (b) strategických rozhodnutí plánovačů

Klasifikace modelů

Při studiu modelů je užitečné identifikovat hlavní kategorie modelů. Klasifikace jednotlivých modelů do těchto kategorií nám okamžitě řekne některé základní informace o jejich struktuře. Jedno rozdělení modelů je založeno na typu výsledku, který předpovídají. **Deterministické modely** ignorují náhodné variace a vždy tak predikují stejný výsledek z daného výchozího bodu. Na druhou stranu může mít model více statistickou povahu a může predikovat statistické rozdělení pravděpodobnosti možných výsledků. O takových modelech říkáme, že jsou **stochastické**.

Druhý přístup k rozlišování mezi typy modelů uvažuje míru pochopení reálného světa, na níž je model založen. Nejjednodušší vysvětlení uvažuje hierarchii organizačních struktur v rámci systému, který je modelovaný. Jedna taková hierarchie u zvířat je znázorněna na obrázku 1.



Obrázek 1: Hierarchie modelů – analogie se světem zvířat

Model, který využívá velké množství teoretických informací, obecně popisuje, co se děje na jedné úrovni hierarchie tím, že uvažuje procesy na nižších úrovních Jedná se o tzv. **mechanistické modely**, protože berou v úvahu mechanismy, prostřednictvím nichž dochází ke změnám. Naproti tomu u **empirických modelů** se nepřihlíží k mechanismu, jímž dochází ke změnám v systému. Namísto toho se pouze zaznamená, že ke změnám došlo, a model se snaží kvantitativně vysvětlit změny spojené s různými podmínkami.

Obě rozdělení, uvedená výše, tedy deterministický / stochastický a mechanistický / empirický, představují extrémy v rozsahu typů modelů. Mezi nimi leží celá škála typů modelů. Tyto dva přístupy ke klasifikace se navíc vzájemně doplňují. Deterministický model může být například mechanistický nebo empirický (ale ne stochastický). Příklady čtyř širokých kategorií modelů vyplývajících z výše uvedené metody klasifikace jsou uvedeny v tabulce 1.

	Empirický	**Mechanistický**
Deterministický	Předpověď růstu dobytka z *regresní závislosti* na konzumaci potravy	Pohyb planet založený na Newtonovské mechanice, popsané *diferenciálními rovnicemi*
Stochastický	*Analýza rozptylu* výnosů odrůd přes lokality a roky	Genetika malých populací založená na Mendelovské dědičnosti popsané *pravděpodobnostními rovnicemi*

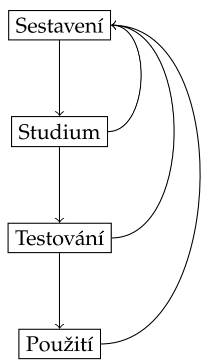
Tabulka 1: Jedna z možných klasifikací modelů

Za zmínku stojí ještě jeden další typ modelu, a to **model systému**. Ten je sestaven z řady dílčích modelů, z nichž každý popisuje podstatu nějaké z interagujících složek modelu. Výše uvedený způsob klasifikace pak je v pak vhodnější pro dílčích modely: v jednom modelu systémů mohou být použity různé typy dílčích modelů.

Mnoho publikací o modelování zmiňuje „simulační modely“. Proč tedy jsou nejsou zahrnuty v našem rozdělení? Důvodem tohoto zdánlivého opomenutí je, že *simulace* odkazuje na jeden způsob, jakým se provádějí modelové výpočty – tedy například počítačovou simulací. Vlastní model systému se nemění v závislosti na způsobu, jakým se provádí potřebné matematické výpočty, i když naše interpretace modelu může záviset na numerické přesnosti prováděných aproximací.

Fáze modelování

Je užitečné rozdělit proces modelování do čtyř hlavních kategorií činnosti, a to na *tvorbu*, *studium*, *testování* a *používání* modelu. I když by to mohlo být hezké si myslet, že modelovací projekty postupují plynule od fáze tvorby modelu až po jeho použití, téměř vždy to tak není. Obecně platí, že vady zjištěné ve fázích studia a testování jsou korigovány návratem do fáze výstavby. Všimněte si, že pokud dojde ke jakýmkoliv změnám modelu, pak fáze studia a testování se musí opakovat. Schématické znázornění možných cest přes jednotlivé fáze modelování je uvedeno na obrázku 2.



Obrázek 2: Jednotlivé fáze modelování

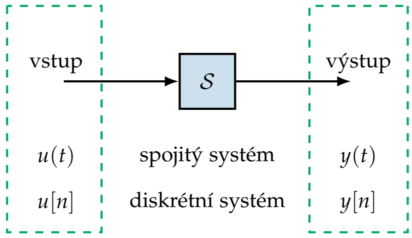
Tento proces opakovaných iterací je pro modelovací projekty typický a je jedním z nejužitečnějších aspektů modelování, pokud jde o lepší pochopení toho, jak systém funguje. Toto rozdělení činnosti v oblasti modelování budeme používat i nadále a bude tvořit strukturu pro zbytek tohoto kurzu.

Model systému

Definice 1 (Systém)**.** Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

- systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,
- systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.

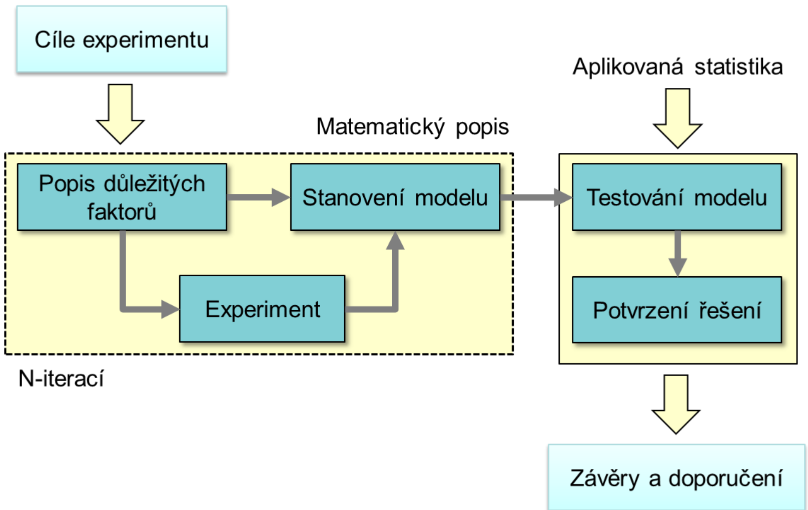


Obrázek 3: Vstup a výstup systému

Model

Za model můžeme pokládat náhradu nebo zjednodušení **skutečného objektu reálného světa** z hlediska jeho vlastností a funkčnosti.

Modelování je možné pouze pokud zavedeme **určitý stupeň** abstrakce a aproximace.



Obrázek 4: Tvorba matematického modelu

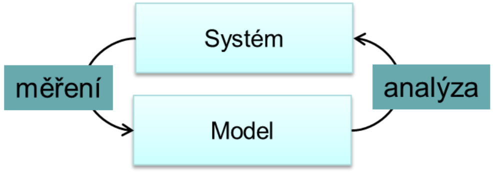
■celá sekce je hodně na vodě■

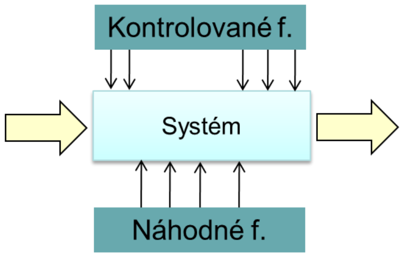
Při analýze navrženého modelu chceme učinit co možná nejsilnější rozhodnutí na základě malého množství dat. Správnost našeho návrhu je nutné statisticky vyhodnotit.

Problémy:

1. Významné diference ve sledovaných parametrech mohou být způsobeny špatným návrhem modelu, případně měřením dat
2. Je těžké rozlišit, zda diference v datech jsou skutečné nebo způsobené „náhodným vlivem“.

Otázky:





Obrázek 5: Problémy při tvorbě modelu

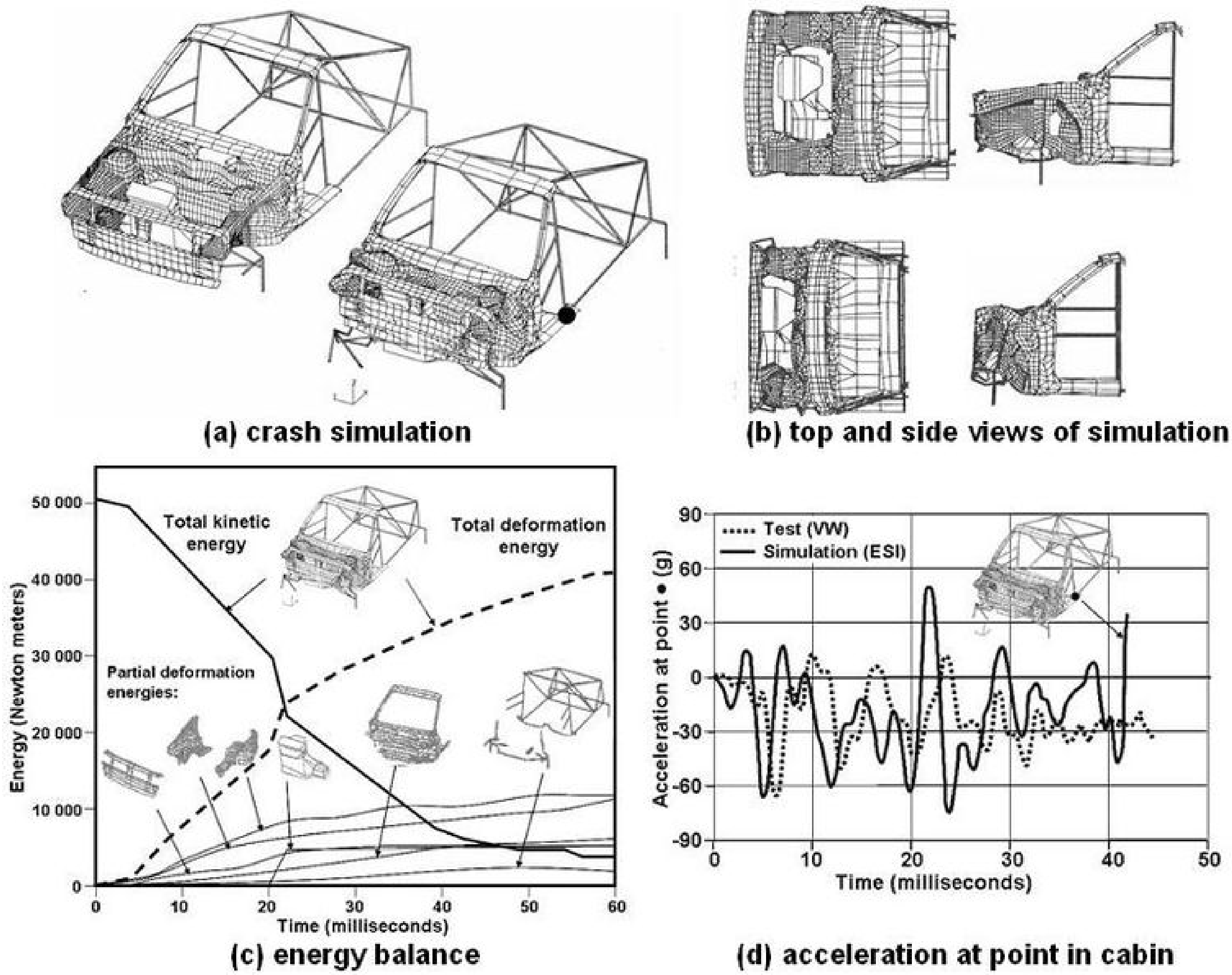
- Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- Jak ověříme pevnost nového mostu?
- Jak ověříme bezpečnost softwaru zabezpečovacího zařízení?
- Jak předpovíme dopravní zácpu na dálnici?
- Jak zajistíme spolehlivou funkci navigace pří výpadku signálu GPS?

Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!

■**pokud nebude víc textu, je třeba změnit marginfigure na figure**■

Obrázek 6: Klenba Gaudího katedrály Sagrada Familia v Barceloně

Obrázek 7: Model klenby pro ověření statiky stavby, sestavený z provázků a plátěných pytlíčků s pískem



Obrázek 8: Virtuální crashtest první generace VW Polo

Dynamické systémy

Dynamický systém má v každém okamžiku **stav**, daný množinou reálných čísel. Tento stav lze reprezentovat jako bod ve stavovém prostoru (tedy jako **vektor**, často $\mathbf{x}$).

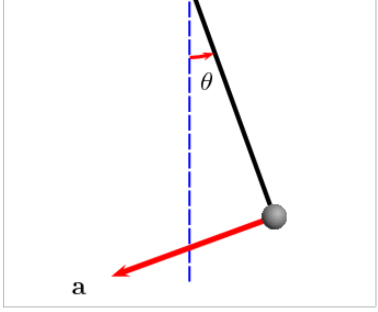
Evoluční pravidlo (rovnice vývoje stavu) popisuje přechody mezi jednotlivými stavy dynamického systému.

- většinou deterministické
- může být stochastické

Pozor: V matematice a fyzice tak nazýváme **systémy citlivé na počáteční podmínky** (dvojité kyvadlo, Lorenzův atraktor)

Příklad 2 (Kyvadlo). Jednoduchým případem dynamického systému je obyčejné fyzikální kyvadlo, jehož výchylka θ od rovnovážné polohy je popsána rovnicí

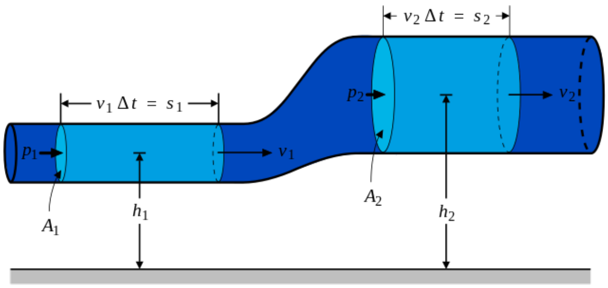
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0$$



Obrázek 9: Obyčejné fyzikální kyvadlo

kde ℓ je délka ramene kyvadla a g je tíhové zrychlení místa, kde je kyvadlo umístěno.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$
$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{F} - \frac{\nabla p}{\rho}$$



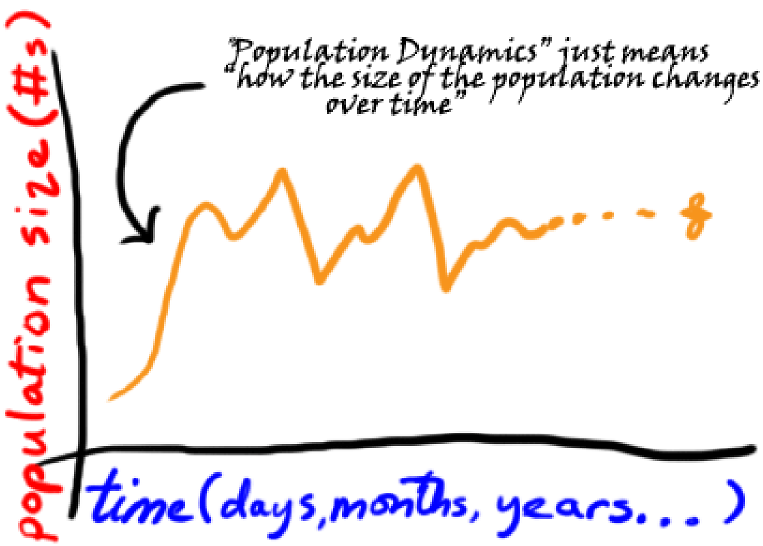
By MannyMax (original) - Image:BernoullisLawDerivationDiagram.png, CC BY-SA 3.0, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=2870495`

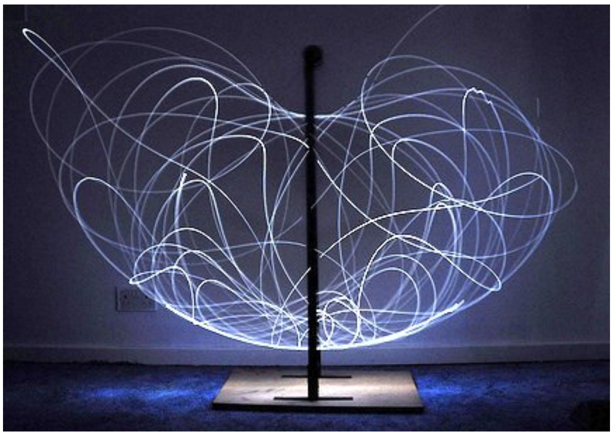
Exponenciální růst

$$\dot{N} = rN$$

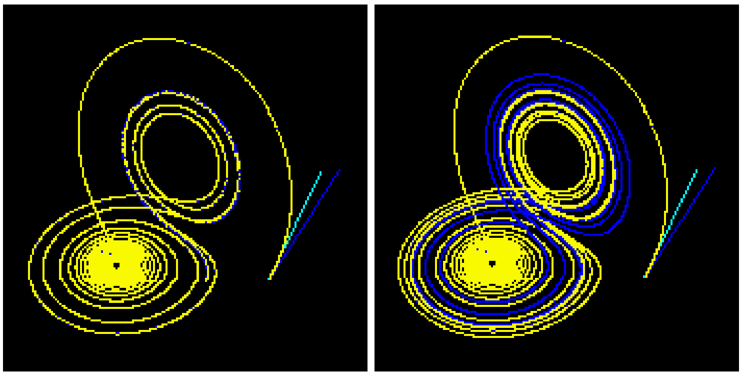
Logistický růst

$$\dot{N} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$



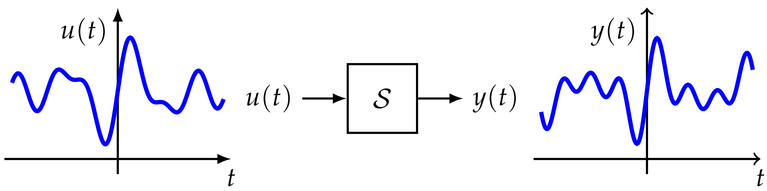


By George Ioannidis - Own work, , `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7920826`



Vnější popis systémů

Vnější popis vychází z popisu systému vektorem *vstupu* $\mathbf{u}$ a vektorem *výstupu* $\mathbf{y}$.



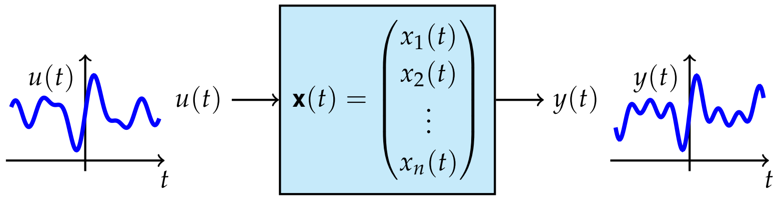
Stavový vektor systému $\mathbf{x}$ nepoužíváme: Systém chápeme jako *černou skříňku*, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat její reakci na vnější události (signály, data).

Vnější model popisujeme *diferenciální rovnicí* pro systémy se spojitým časem a *diferenční rovnicí* pro systémy s diskrétním časem. Uvedená rovnice je obecně vyššího řádu, než 1.

Vnitřní popis systémů

Vnitřní, tzv. **stavový popis** systému používá k popisu dynamiky systému vektor **vnitřních stavů x**.

Vektor vstupů **u** a vektor výstupních veličin **y** jsou druhotné veličiny vnitřního popisu.



Stavové modely popisujeme

- soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a
- soustavou diferenčních rovnic prvého řádu pro systémy s diskrétním časem.

Modelování není samospasitelné:

- model je pouze přiblížením reality,
- výstupy modelu je proto vždy třeba ověřovat,
- možné chyby jsou jak v modelu, tak i v jeho výpočtu.

Rozlišujeme dva kroky ověření:

Verifikace: Počítáme správný model.

Validace: Model počítá správně.

Příklad 3 (RC článek). ■**zde se to kvůli vloženému ‘frame‘ z prezentace rozlomí, text má navazovat**■

Napětí $u_1(t)$ na RC článku je součet napětí na rezistoru $u_R(t)$ a na kapacitoru $u_C(t)$:

$$u_1(t) = u_R(t) + u_C(t). \tag{1}$$

Proud procházející obvodem $i(t)$ a časový průběh napětí na rezistoru $u_R(t)$ je možno vyjádřit jako

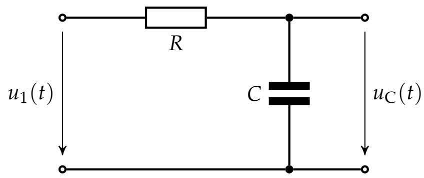
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t)$$

a proto

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t). \tag{2}$$

Dosazením $u_R(t)$ do rovnice (1) získáme diferenciální rovnici prvního řádu pro časový průběh napětí na kapacitoru $u_C(t)$:

$$RC\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C(t) + u_C(t) = u_1(t).$$



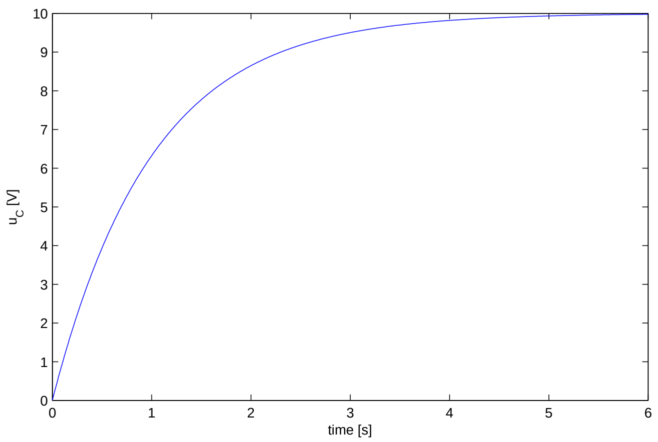
Obrázek 10: RC článek

Řešení uvedené rovnice má pro všechna $t \geq 0$,

$$\alpha = \frac{1}{RC},$$
$$u_1(t) = U_0$$

a pro počáteční hodnotu $u_C(0) = 0$ tvar

$$u_C(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}).$$



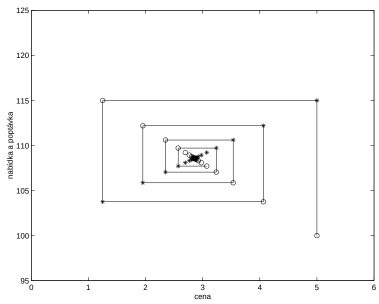
Obrázek 11: Výstup RC článku

Příklad 4 (Nabídka a poptávka). Základní makroekonomický model rovnovážného trhu, kde nabídka produktu odpovídá poptávce po něm a na trhu se postupně ustálí cena produktu, není lineární. Představíme si jeho linearizovanou variantu, u níž je jako poptávka tak i nabídka lineárně závislá na ceně produktu.

Rovnice nabídky

Nabídka *dnes* závisí na *včerejší* ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n[k] = \mathcal{C}c[k-1] + \mathcal{A}u[k]. \tag{3}$$



Obrázek 12: Pavučinkový diagram – variace ceny

Rovnice poptávky

Poptávka *dnes* závisí na *dnešní* ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

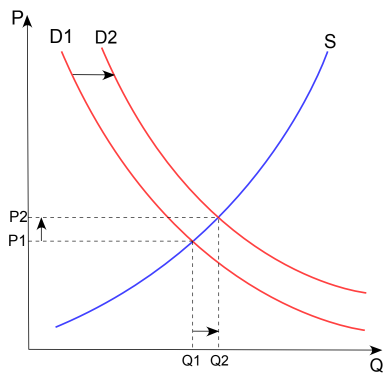
$$p[k] = -\mathcal{D}c[k] + \mathcal{B}u[k]. \tag{4}$$

Rovnost nabídky a poptávky

$$n[k] = p[k]$$

pak vede po dosazení z (3) a (4) na diferenční rovnici prvního řádu

$$c[k] + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}c[k-1] = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}}u[k]. \tag{5}$$



Obrázek 13: Obecná závislost

Iterace diferenční rovnice

■ doplnit text ■

Iterace rovnice ceny

Iterací rozumíme obecně opakování nějakého postupu, v matematice například opakované vyhodnocení funkce. Výsledky z jedné iterace se použijí jako vstup pro další iterační krok.

Iteračně například

- hledáme nulové body funkce, $f(x^*) = 0$
- simulujeme vývoj *diskretizovaného* dynamického systému

Diferenční rovnici se vstupem $u[n]$ a výstupem $y[n]$ můžeme přepsat do tvaru

$$y[n+1] = f(y[n], y[n-1], \dots, u[n], u[n-1], \dots)$$

stanovit tzv. *počáteční podmínky* dané řádem systému a potom například pro $n = 2, 3, \dots$ s počátečními podmínkami $y[0], y[1], y[2]$ iterativně počítat výstupy diskrétního systému $y[3], y[4], \dots$.

Podobný postup se používá pro numerickou simulaci spojitých systémů. V tom případě se systémové funkce vyhodnocují v předem stanovených časových okamžicích, výsledek není tedy zcela přesný.

Diferenční rovnici (5) přepíšeme do kanonického tvaru[1]

$$y[k] + \gamma y[k-1] = \beta u[k]$$

a postupnými iteracemi nalezneme pro $u[k] = \mathbf{1}[k]$ a počáteční podmínku $y[-1] = 0$ následující vztahy.

Pro $k = 0$:

$$\begin{aligned} y[0] + \gamma y[-1] &= \beta u[0] \\ y[0] &= \beta - \gamma y[-1] = \beta \end{aligned}$$

Pro $k = 1$:

$$\begin{aligned} y[1] + \gamma y[0] &= \beta u[1] \\ y[1] &= \beta - \gamma y[0] = \beta - \beta\gamma \end{aligned}$$

Pro $k = 2$:

$$\begin{aligned} y[2] + \gamma y[1] &= \beta u[2] \\ y[2] &= \beta - \gamma y[1] = \beta - \beta\gamma + \beta\gamma^2 \end{aligned}$$

[1] *Kanonický tvar* diferenční rovnice označuje ustálenou formu zápisu rovnice, kde výstupy jsou umístěny na levé straně a vstupy na pravé straně rovnice, seřazeny podle posunutí. Zápis v kanonickém tvaru umožňuje čtenáři snadnější orientaci v problematice.

Pro obecné n:

$$y[n] + \gamma y[n-1] = \beta u[n]$$
$$y[n] = \beta - \gamma y[n-1] = \beta \left(1 - \gamma + \gamma^2 + \cdots + (-\gamma)^n\right)$$

Pokud si uvědomíme, jak vypadá vzorec pro částečný součet členů geometrické posloupnosti, lze z výše uvedeného výčtu odvodit, že řešení rovnice ceny by mělo být ve tvaru

$$y[n] = \beta \sum_{m=0}^{n} (-\gamma)^m = \beta \frac{1-(-\gamma)^{n+1}}{1+\gamma} = \frac{\beta}{1+\gamma} + \frac{\beta\gamma}{1+\gamma}(-\gamma)^n.$$

Výsledná cena tedy pro stabilní trh klesá k určité stabilní hodntě, dané podílem $\beta/(1+\gamma)$. Výsledný proces stabilizace ceny je znázorněn na obrázku 12.

Úvod do teorie signálů

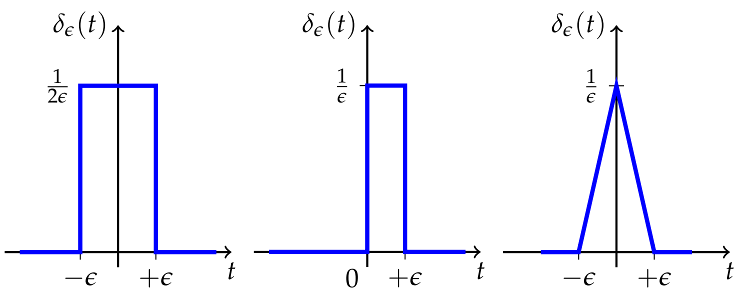
Doporučená literatura pro tuto část je **?**.

Základní spojité signály

■**doplnit text**■

Diracův impuls

Tato funkce je definována na časovém intervalu pro všechna t a její nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu $t = 0$. Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé $\varepsilon > 0$.



Obrázek 14: Konečná reprezentace $\delta_\epsilon(t)$ pro $\epsilon > 0$

Funkci $\delta(t)$ definujeme jako $\delta(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \delta_\epsilon(t)$.

Funkce $\delta(t)$ se nazývá **Diracův impuls**, Diracova δ-funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota $\delta(t)$ pro $t \neq 0$ je $\delta(t) = 0$. Její hodnota v $t = 0$ není definována jako funkce, používá se integrální definice

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ \mathrm{d}t = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)\ \mathrm{d}t = \int_{0-}^{0+} \delta(t)\ \mathrm{d}t = 1$$

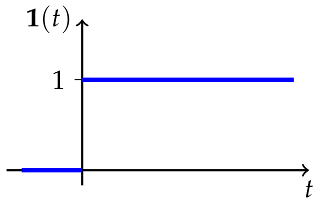
pro každé $\epsilon > 0$.

Jednotkový skok

Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena $\mathbf{1}(t)$ a je definována jako

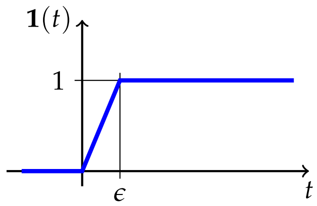
$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0, \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases}$$

Platí



Obrázek 15: Jednotkový skok

$$\delta(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{1}(t).$$



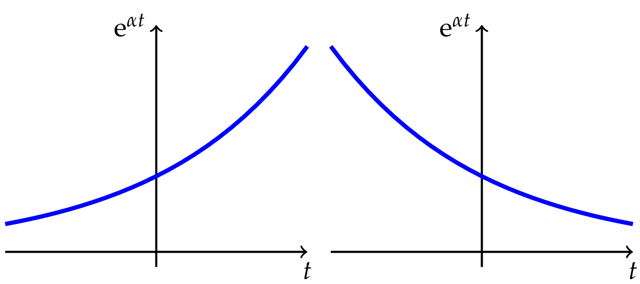
Obrázek 16: Jednotkový skok

Exponenciála

Uvažujme exponenciální funkci

$$f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t},$$

kde α je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.



Obrázek 17: Reálná exponenciála a) pro $\alpha > 0$, b) pro $\alpha < 0$.

Exponenciální funkce

$$f(t) = A\,\mathrm{e}^{\alpha t},$$

kde $\alpha \in \mathbb{C}$, je zajímavá hlavně v případě, kdy $\alpha = \mathrm{i}\omega$,

$$f(t) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} = A\left(\cos\omega t + \mathrm{i}\,\sin\omega t\right).$$

Periodické a harmonické funkce

O spojitém signálu $f(t)$ říkáme, že je periodický s periodou T, jestliže

$$\forall t : f(t+T) = f(t)$$

a tedy také pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$

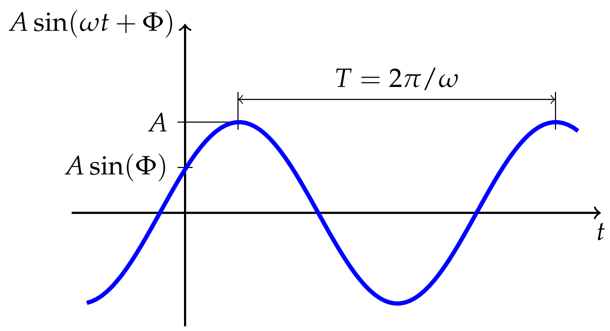
$$f(t) = f(t+T) = f(t+2T) = \cdots = f(t+k \cdot T)$$

Nejmenší možné T nazýváme **fundamentální perioda**, značíme T_0.

Nejčastěji studovanými signály s periodickým průběhem jsou harmonické funkce, tedy funkce sinus a kosinus. Sinusový signál je obecně zapisován jako

$$f(t) = A\ \sin(\omega t + \Phi),$$

Konstanty A, ω a Φ se nazývají **amplituda**, **úhlová frekvence** a



Obrázek 18: Sinusový signál

fázový posun. Sinusovka je periodická se základní periodou $T = 2\pi/\omega$.

Základní diskrétní signály

Jak diskrétní signály vznikají?

- **přirozeně** (průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů)
- **vzorkováním spojitých signálů** (naměření teploty každou hodinu, měřením průtoku každých 15 minut)

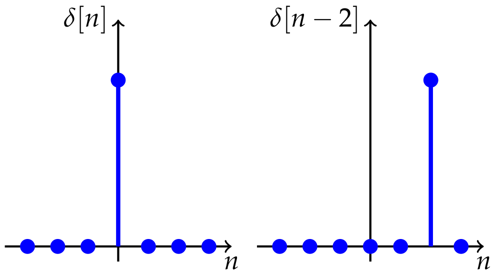
Diskrétní signály, jimiž se budeme v předmětu zabývat, jsou diskrétní v čase, ale *spojité ve funkční hodnotě*.

Digitální signál je totiž často **kvantovaný**, nabývá tedy v každém n pouze diskrétní množiny funkčních hodnot, například $\{0, 1, 2, \ldots, 65535\}$.

Diskrétní jednotkový impuls a skok

Diskrétní jednotkový impuls $\delta[n]$ je definován vztahem

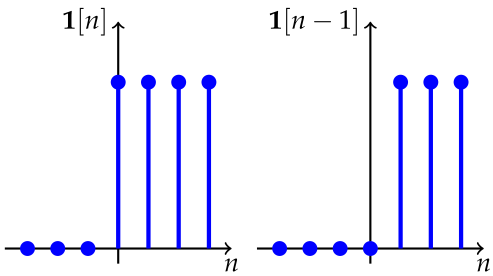
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0. \end{cases}$$



Obrázek 19: Diskrétní jednotkový impuls a posunutý jednotkový impuls.

Diskrétní jednotkový skok $\mathbf{1}[n]$ je definován vztahem

$$\mathbf{1}[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0, \\ 0 & \text{pro } n < 0. \end{cases}$$



Obrázek 20: Diskrétní jednotkový skok a posunutý jednotkový skok.

Z obrázku 20 snadno nahlédneme, že

$$\mathbf{1}[n] = \sum_{m=0} n\delta[n-m] = \delta[n] + \delta[n-1] + \cdots + \delta[1] + \delta[0].$$

Diskrétní sinusová posloupnost

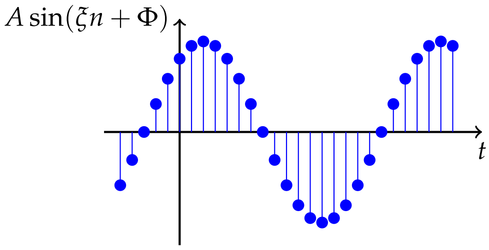
Mějme sinusový signál $f(t) = A\sin(\omega t + \Phi)$ s periodou $T = 2\pi/\omega$. Pokud tento signál vzorkujeme s periodou $T_s > 0$, získáme diskrétní sinusový signál

$$f[n] = f(nT) = A\sin(\omega n T_s + \Phi) = A\sin(\xi n + \Phi),$$

kde $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ a $\xi = \omega T_s$.

Diskrétní signál $f[n]$ je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo N takové, že platí

$$f[n] = f[n+N] = f[n+2N] = \cdots = f[n+k\cdot N] \tag{6}$$



Obrázek 21: Diskrétní sinusová posloupnost

pro všechna $n \in \mathbb{Z}$ (z intervalu $(-\infty, \infty)$) a pro libovolné $k \in \mathbb{Z}$. N se nazývá **perioda diskrétního signálu**.

Nejmenší možné N nazýváme **fundamentální perioda** a značíme N_0.

Diskrétní sinusový signál *nemusí být nutně periodický*, záleží na volbě vzorkovací periody T_s. Pro periodický diskrétní sinusový signál s periodou N musí platit

$$N = m \cdot \frac{2\pi}{T_s},$$

kde $m \in \mathbb{N}$. Máme i $N \in \mathbb{N}$, proto $2\pi/T_s$ musí být racionální číslo.

Příklad 5 (Neperiodický sinusový signál). Signál

$$y[n] = \sin n$$

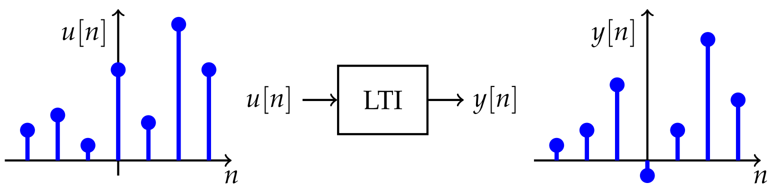
není pro $T_s = 0.1\,\mathrm{s}$ periodický, protože $2\pi/T_s$ není racionální číslo.

Odezva systému

■ **doplnit** ■

Diskrétní systém

■ **doplnit** ■



Obrázek 22: Diskrétní LTI systém, jeho vstupní a výstupní posloupnost

Definice 6 (Impulsní odezva)**.** Odezvu systému na jednotkový impuls $\delta[n]$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h[n]$,

$$\begin{aligned} h[n] &= \mathcal{S}\{\delta[n]\} \\ h[n,m] &= \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Definice 7 (Přechodová odezva)**.** Odezvu systému na jednotkový skok $\mathbf{1}[n]$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s[n]$,

$$s[n] = \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^{n} \delta[n-m]\right\}.$$

Lineární a nelineární

Řekli jsme si, že systém není nic jiného, než černá skříňka, *black box*, kterou se pokoušíme nejprve identifikovat a poté reprodukovat. Při identifikaci se nejprve ptáme, zda se jedná o lineární systém. ■ **tohle taky nedává moc smysl** ■

Definice 8 (Linearita)**.** V matematice označujeme funkci $f(x)$ jako lineární v případě, že je

1. aditivní $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ a
2. homogenní, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Obdobně to platí i pro lineární systémy.

Definice 9 (Lineární systém)**.** Systém je lineární, pokud pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$\begin{aligned} \mathcal{S}\{u_1[n] + u_2[n]\} &= \mathcal{S}\{u_1[n]\} + \mathcal{S}\{u_2[n]\}, \\ \mathcal{S}\{\alpha u[n]\} &= \alpha \mathcal{S}\{u[n]\}. \end{aligned}$$

Definice 9 nám trošku zakukleně popisuje jednu základní vlastnost všech lineárních systémů, ať už popisují svět v diskrétním či spojitém čase: Je-li vstupem systému vážený součet několika signálů, výstupem systému je opět stejně vážený součet neboli *superpozice* dílčích odezev na tyto vstupy. Jinak řečeno, odezva lineárního systému na lineární kombinaci elementárních vstupních signálů je lineární kombinace odezev na tyto vstupy.

Definice 10 (Princip superpozice)**.** Pro dva různé vstupní signály $u_1[n]$ a $u_2[n]$ platí

$$\begin{aligned} y_1[n] &= \mathcal{S}\{u_1[n]\} \\ y_2[n] &= \mathcal{S}\{u_2[n]\} \end{aligned}$$

a pro $u[n] = \alpha u_1[n] + \beta u_2[n]$ také

$$\alpha y_1[n] + \beta y_2[n] = y[n] = \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\{\alpha u_1[n] + \beta u_2[n]\}$$

Obecně platí

$$u[n] = \sum_i a_i u_i[n] \quad \rightarrow \quad y[n] = \sum_i a_i y_i[n] = \sum_i a_i \mathcal{S}\{u_i[n]\}$$

Příklad 11 (Lineární systém)*.* Uvažujme systém

$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n].$$

Je-li na vstupu lineární kombinace dvou různých signálů

$$u[n] = b_1 u_1[n] + b_2 u_2[n]$$

je na výstupu

$$y[n] = b_1\left(y_1[n] + a\,y_1[n-1]\right) + b_2\left(y_2[n] + a\,y_2[n-1]\right)$$

kde

$$y_1[n] + a\,y_1[n-1] = u_1[n]$$
$$y_2[n] + a\,y_2[n-1] = u_2[n]$$

Příklad 12 (Nelineární systém). Numerický výpočet druhé odmocniny lze zapsat rekurentním vztahem

$$y[n+1] = \frac{1}{2}\left(y[n] + \frac{u[n]}{y[n]}\right).$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna $\sqrt{10} = 3{,}16227766017$. Pro $u[n] = u[0] = 10$ dostáváme postupně

n	$y[n]$	$y^2[n]$
1	3	9
2	3,165	10,017225
3	3,162278	10,00000214928
4	3,162277660	9,999999999568
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Pro obecný vstupní signál $u[n]$ je pak odezva lineárního systému

$$\begin{aligned} y[n] &= \mathcal{S}\{u[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,\delta[n-m]\right\} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,\mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m]\,h[n,m]. \end{aligned} \tag{8}$$

Vidíme, že chování systému je zcela určeno jeho odezvami na různě posunuté jednotkové pulsy $h[n,m]$.

Přechodová odezva diskrétního lineárního systému $s[n]$ je dána prostým součtem impulsních odezev pro $0 \le m \le n$

$$\begin{aligned} s[n] &= \mathcal{S}\{\mathbf{1}[n]\} = \mathcal{S}\left\{\sum_{m=0}^{n} \delta[n-m]\right\} \\ &= \sum_{m=0}^{n} \mathcal{S}\{\delta[n-m]\} = \sum_{m=0}^{n} h[n,m]. \end{aligned}$$

Lze za nějakých podmínek zjednodušit $h[n,m]$?

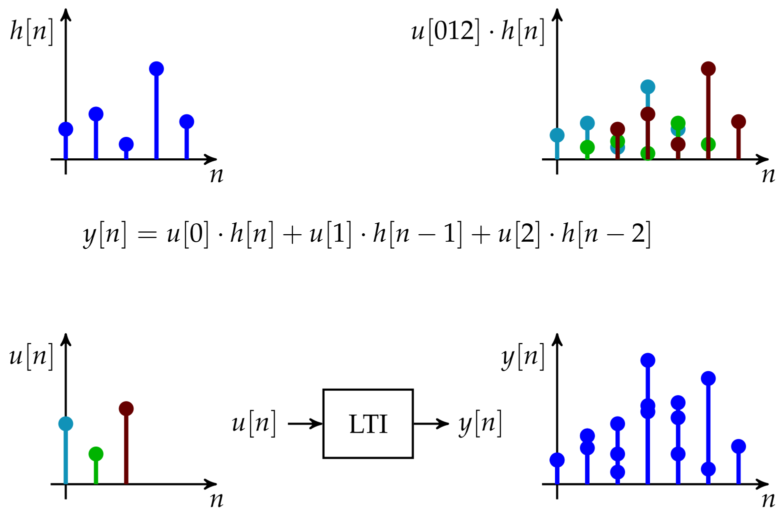
Časově invariantní, resp. stacionární systém

Systém se nazývá **časově invariantní**, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n-m$ a nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

$$\begin{aligned} &\text{dnes} \quad \ldots & y[n] &= \mathcal{S}\left[u[n]\right] \\ &\text{včera} \quad \ldots & y[n-1] &= \mathcal{S}\left[u[n-1]\right] \\ & & &\vdots \end{aligned}$$

Potom také rovnice (7) pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

$$h[n,m] \to h[n-m] = \mathcal{S}\{\delta[n-m]\}\,.$$



Obrázek 23: Superpozice odezvy $y[n]$ jako $\sum_{k=0} n u[k]h[n-k]$

V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice (8) **konvoluční sumu**

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[n-m]\cdot u[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\cdot u[n-k], \tag{9}$$

kterou pro úsporu místa značíme

$$y[n] = h[n] * u[n].$$

Pozor: nejde o násobení!

$$h[n] \neq \frac{y[n]}{u[n]}$$

Příklad 13 (Časově invariantní systém). Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsaný diferenční rovnici

$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n].$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj. a je konstantní a není funkcí n, zachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n-m$. Impulsní odezva je potom

$$h[n] = (-a)^n \mathbf{1}[n].$$

Příklad 14 (Časově proměnný systém). Uvažujme nyní obměněnou diferenční rovnici

$$y[n] + n\cdot y[n-1] = u[n].$$

Koeficient u $y[n-1]$ závisí na čase a tato rovnice nezachovává tvar při záměně $n \to n-m$. **ukázat, proč** Impulsní odezvu lze psát ve tvaru

$$h[n] = (-1)^n\, n!\,\mathbf{1}[n].$$

Kauzální, příčinný systém

Systém je **kauzální**, pokud jeho výstup závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupů.

Výstupní signál $y[n]$ kauzálního systému tedy závisí pouze na $\{u[n], u[n-1], u[n-2], \dots\}$. V konvoluční sumě (9) proto

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, u[n-k] \\ &= \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{-1} h[k]\, u[n-k]}_{0} + \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, u[n-k] \end{aligned}$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy $h[n] = 0$ pro $n < 0$.

Pro kauzální systémy tedy platí, že jejich impulsní odezva musí být nulová před okamžikem vstupního impulsu, což odpovídá našemu intuitivnímu vnímání kauzality: napřed musí existovat příčina, až po ní můžeme pozorovat důsledky.

Pro lineární kauzální systémy přitom také platí, že pokud je jejich vstup až do nějakého okamžiku roven 0, i výstup bude až do toho okamžiku nulový.

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^{\infty} u[k] \cdot h[n-k].$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall n < 0 : u[n] = 0, y[n] = 0$ (oba signály mohou mít nenulové členy pouze pro $n \geq 0$), potom platí

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k] \cdot u[n-k] = \sum_{k=0}^{n} h[n-k] \cdot u[k].$$

Spojitý systém

Definice 15 (Impulsní odezva)**.** Odezvu systému na Diracův impuls $\delta(t)$ budeme nazývat **impulsní odezva** a značit $h(t)$,

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{S}\{\delta(t)\} \\ h(t,\tau) &= \mathcal{S}\{\delta(t-\tau)\}\,. \end{aligned}$$

Definice 16 (Přechodová odezva)**.** Odezvu systému na jednotkový skok $\mathbf{1}(t)$ budeme nazývat **přechodová odezva** a značit $s(t)$,

$$s(t) = \mathcal{S}\{\mathbf{1}(t)\} = \mathcal{S}\left\{ \int_0^t \delta(t-\tau)\ \mathrm{d}t \right\}.$$

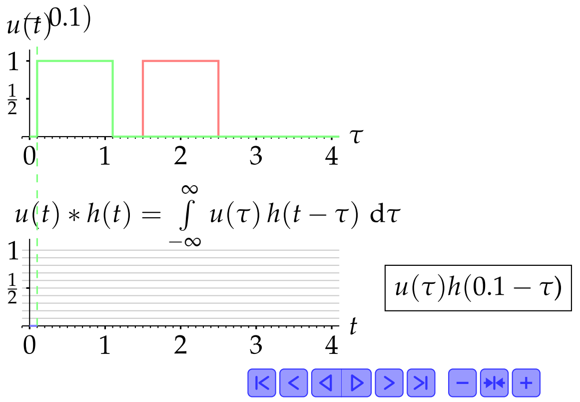
V případě spojitého casu postupujeme podobně a odvodíme pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)\cdot u(\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

Operaci často zapisujeme ve zjednodušené formě jako

$$y(t) = h(t) * u(t).$$

Opět připomínáme, že se v tomto zápisu nejedná o násobení!



Obrázek 24: Animovaný obrázek výpočtu konvoluce dvou signálů. Funguje pouze v prostředí Adobe Reader, jinde uvidíte prázdno

Pro $u(t) = \delta(t)$ platí pro lineární a časové invariantní systém samozřejmě

$$y(t) = \mathcal{S}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\cdot\delta(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = h(t). \tag{10}$$

Výstupní signál $y(t)$ spojitého kauzálního systému závisí pouze na hodnotách vstupů pro předešlé časové okamžiky. Z důvodu, které klademe na kauzální chování systému, přejde konvoluční integrál (10) na tvar

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{0} h(\tau)\, u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau}_{0} + \int_{0}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

a hodnoty impulsní odezvy pro $t < 0$ uvažujeme opět $h(t) = 0$.

Konvoluční integrál pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)\cdot u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{\infty} u(\tau)\cdot h(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $\forall t < 0 : u(t) = 0, y(t) = 0$ (oba signály mohou být nenulové členy pouze pro $t \geq 0$), potom platí

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(\tau)\cdot u(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau = \int_{0}^{t} u(\tau)\cdot h(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau.$$

Autonomní a neautonomní systém

Definice 17 (Autonomní systém). Za autonomní systém považujeme takový, který **nemá vstup**. Diskrétní autonomní systém je popisuje tedy například diferenční rovnice vnějšího popisu

$$y[n+1] + a\,y[n] = 0.$$

Výstup autonomního systému je odezvou na počáteční podmínky.

V případě, že systém má vstup $u[n]$, tedy

$$y[n] + a\,y[n-1] = u[n],$$

systém pokládáme za neautonomní.

Stabilita

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

Impulsní odezvu spojitého LTI systému lze vždy zapsat jako součet exponenciel ve tvaru

$$h(t) = \sum_{\mu=0}^{n} k_\mu \mathrm{e}^{p_\mu t}.$$

kde p_μ jsou tzv. *póly přenosové funkce* systému.

Pro $p_\mu \in \mathbb{R}$ je $h(t)$ reálná exponenciela, která pro $t \to \infty$ buď roste nade všechny meze ($p_\mu > 0$) nebo klesá k nule ($p_\mu < 0$).

Pro $p_\mu \in \mathbb{C}$ je $h(t)$ komplexní exponenciela, která pro $t \to \infty$ kmitá a buď roste nade všechny meze nebo klesá k nule, záleží na $\Re p_\mu$.

Jak jsme si ukázali v přednášce **??**, impulsní odezvu LTI systému lze vždy zapsat jako součet exponenciel ve tvaru

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{\mu=0}^{n} \frac{k_\mu}{p-p_\mu}\right\} = \sum_{\mu=0}^{n} k_\mu \mathrm{e}^{p_\mu t} = h(t).$$

V případě, kdy p_μ je reálné číslo, je impulsní odezvou reálná exponenciela, která pro $t \to \infty$ buď roste nade všechny meze (to v případě, že p_μ je kladné), nebo klesá k nule (to v případě, že p_μ je záporné). Bude-li p_μ komplexní číslo, $p_\mu = a + b\mathrm{i}$, je $\mathrm{e}^{p_\mu t} = \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}$.

Ryze komplexní exponenciela e^{ibt} je podle Eulerova vzorce kombinací harmonických průběhů, které jsou pro $t \to \infty$ seshora i zespoda omezené, a rozhodující pro chování celé funkce je proto průběh e^{at}, jenž tyto harmonické moduluje. Bude-li v tomto případě a kladné, roste $t \to \infty$ hodnota e^{at} nade všechny meze, je-li a záporné, klesá hodnota e^{at} k nule.

Z výše uvedené úvahy vyplývá, jak z polohy pólů přenosové funkce jednoduše odvodíme tvar impulsní odezvy a tedy stabilitu ($\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$) respektive nestabilitu ($\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$) systému:

- Pro stabilní systém platí $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$.
- V impulsní odezvě se nachází minimálně jedna rostoucí exponenciela, jež bude hodnotě $h(t)$ postupně dominovat, a je tedy $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$.
- Systém může být ale nestabilní i v jiných případech, kdy také $\lim_{t\to\infty} h(t) = \infty$.