Řízení a optimalizace
Stavové modely a model-prediktivní řízení

Matematické metody pro ITS (11MAMY)

Jan Přikryl

2. přednáška 11MAMY

úterý 31. března 2020

verze: 2020-03-31 08:15

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

Obsah přednášky

Popis dynamického systému

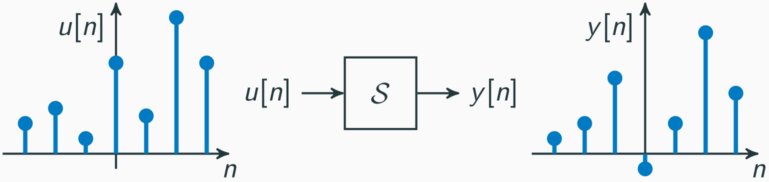
- Vnější popis systému – Opakování
- Vnitřní popis systému
- Vnitřní popis nelineániho systému
- Vnitřní popis lineárního systému

Příklady na stavový popis dynamických systémů

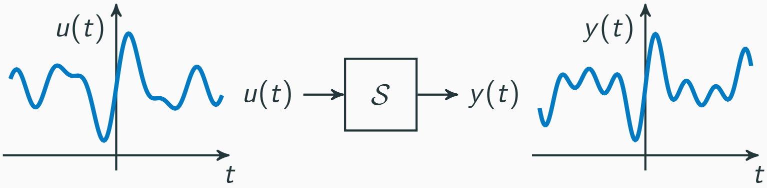
Úrovně modelování

Základy teorie řízení

Vnější popis diskrétního systému



Vnější popis spojitého systému



Vnitřní popis systému

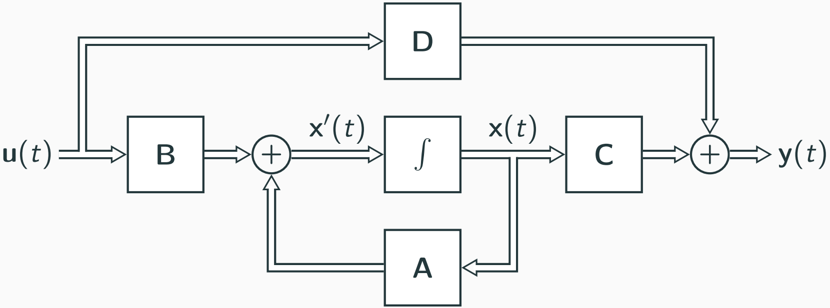
Spojitý systém	**Diskrétní systém**
vstup $\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{u}[n]$
stav $\mathbf{x}(t)$	$\mathbf{x}[n]$
výstup $\mathbf{y}(t)$	$\mathbf{y}[n]$
$\mathbf{x}'(t) = \mathrm{f}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathrm{f}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$
$\mathbf{y}(t) = \mathrm{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$	$\mathbf{y}[n] = \mathrm{g}(n, \mathbf{x}[n], \mathbf{u}[n])$

Vnitřní popis systému

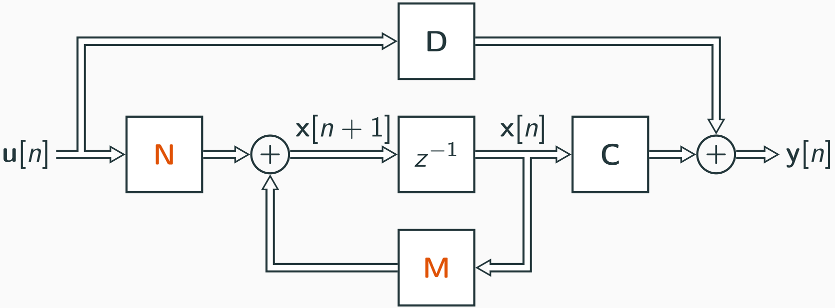
Spojitý systém	Diskrétní systém
$\mathbf{u}(t)$ . . . vstup	$\mathbf{u}[n]$
$\mathbf{x}(t)$ . . . stav	$\mathbf{x}[n]$
$\mathbf{y}(t)$ . . . výstup	$\mathbf{y}[n]$
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}[n]\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}[n]\,\mathbf{u}[n]$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}[n]\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}[n]\,\mathbf{u}[n]$

Spojitý systém	Diskrétní systém
$\mathbf{u}(t)$ . . . vstupní (řídicí) vektor	$\mathbf{u}[n]$ . . . vstupní (řídicí) vektor
$\mathbf{x}(t)$ . . . stavový vektor	$\mathbf{x}[n]$ . . . stavový vektor
$\mathbf{y}(t)$ . . . výstupní vektor	$\mathbf{y}[n]$ . . . výstupní vektor
$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{x}[n+1] = \mathbf{M}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{N}\,\mathbf{u}[n]$
$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t)$	$\mathbf{y}[n] = \mathbf{C}\,\mathbf{x}[n] + \mathbf{D}\,\mathbf{u}[n]$
$\mathbf{A}$ je matice systému $(n \times n)$	$\mathbf{M}$ je matice systému $(n \times n)$
$\mathbf{B}$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$	$\mathbf{N}$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$
$\mathbf{C}$ je výstupní matice $(m \times n)$	$\mathbf{C}$ je výstupní matice $(m \times n)$
$\mathbf{D}$ je výstupní matice $(m \times r)$	$\mathbf{D}$ je výstupní matice $(m \times r)$

Vnitřní popis spojitého systému



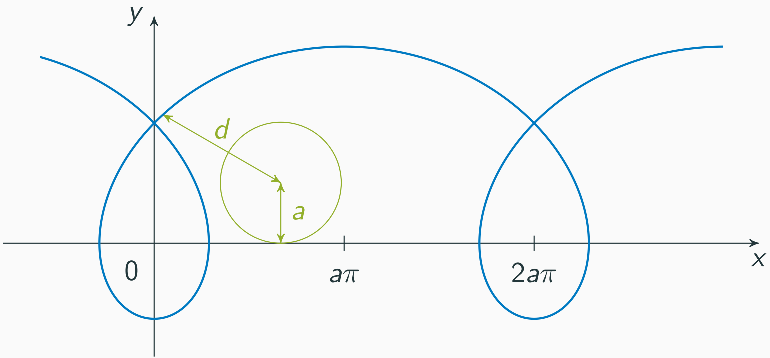
Vnitřní popis diskrétního systému



Obsah přednášky

Příklad: Cykloida

Cykloida je křivka, kterou opisuje „bod, pevně spojený ve vzdálenosti d od středu s kružnicí o poloměru a, která se odvaluje po přímce“.[1]



[1] Lze si ji možná lépe představit tak, že vezmete lahev od piva nebo mléka, na její dno přilepíte špejli a budete sledovat křivku, kterou opíše její konec.

Příklad: Cykloida, rovnice pohybu

V čase proměnnou polohu bodu $\mathbf{p} = [x, y]$ po cykloidě lze popsat parametrickou soustavou rovnic

$$x(t) = x_1(t) = at - d\sin t,$$
$$y(y) = x_2(t) = a - d\cos t,$$

která je pro počáteční podmínky[2]

$$x_1(0) = 0 \quad \text{a} \quad x_2(0) = a - d$$

dána řešením stavové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} t.$$

[2] Bod je na počátku děje v dolní úvrati.

Příklad: Cykloida, rovnice pohybu v maticové formě

Poloha bodu je výstupem dynamického systému

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,t$$
$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{x}(t)$$

popsaného maticemi

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

Příklad: Vlci a ovečky

Nelineární stavový model **vlci a ovečky**, který je znám v literatuře jako *Lotka-Volterra predator-prey model*, se týká populace ovcí popsané stavovou proměnnou $x_1(t)$ a populace vlků popsané stavovou proměnnou $x_2(t)$.

Tento dynamický model je autonomní a lze jej popsat nelineární soustavou stavových rovnic ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1(t) = a\,x_1(t) - b\,x_1(t)x_2(t),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2(t) = -c\,x_2(t) + d\,x_1(t)x_2(t).$$

Příklad: Vlci a ovečky – Interpretace modelu

Uvedený model můžeme snadno interpretovat: Žijí-li ovce a vlci odděleně, pro počet ovcí platí rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_1(t) = a\, x_1(t),$$

jejímž řešením je exponenciální růst

$$x_1(t) = x_1(0)\, \mathrm{e}^{at},$$

zatímco bez potravy je přírůstek populace vlků záporný

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_2(t) = -c\, x_2(t)$$

a vlci hynou,

$$x_2(t) = x_2(0)\, \mathrm{e}^{-ct}.$$

Příklad: Vlci a ovečky – Model interakce

Počet sežraných ovcí a nasycených vlků je úměrný počtu jejich setkání – ten je dán součinem

$$x_1(t)x_2(t).$$

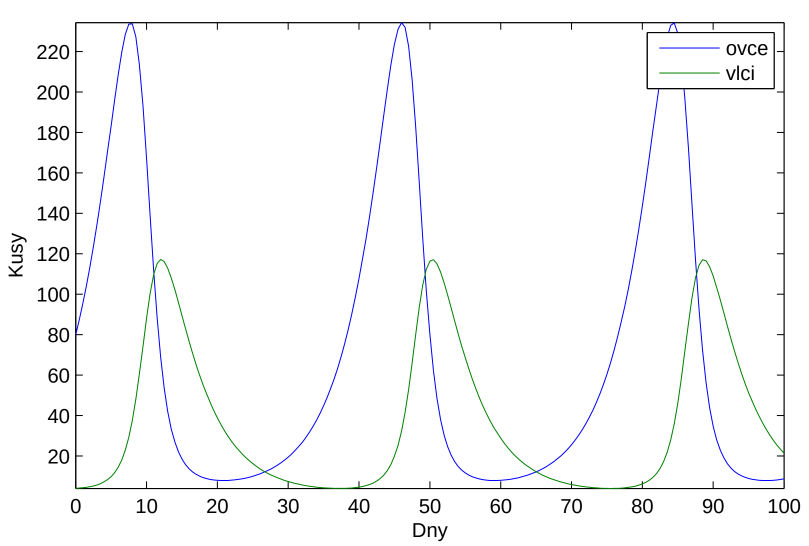
Počet ovcí klesá s rostoucí šancí, že ovce potká vlka:

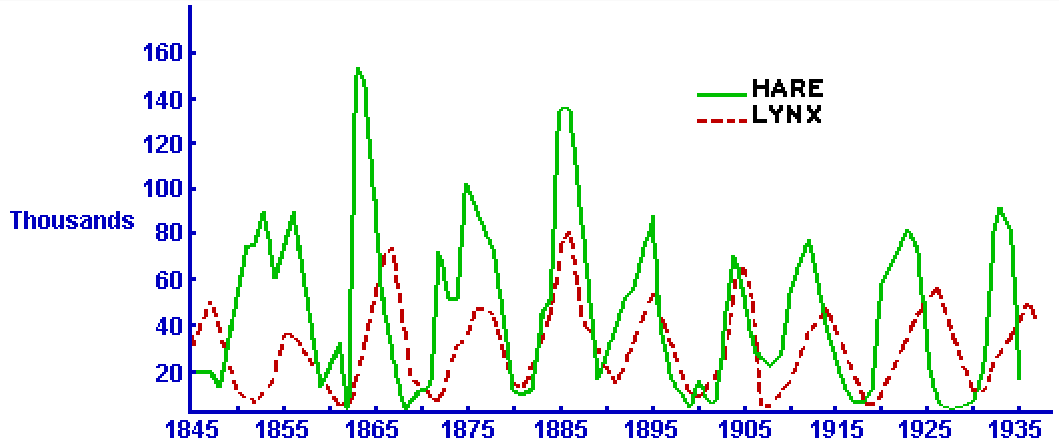
$$-b\,x_1(t)x_2(t),$$

a vlci, hodující na ovcích, se mají dobře a jejich počet proto odpovídajícím způsobem stoupá:

$$d\,x_1(t)x_2(t).$$

Příklad: Vlci a ovečky – Výstup modelu




Thousands
160
140
120
100
80
60
40
20
1845
1855
1865
1875
1885
1895
1905
1915
1925
1935
HARE
LYNX

Obsah přednášky

Úrovně modelování

V některých případech jsme schopni přesně matematicky popsat chování celého systému.

V případě složitých systémů s mnoha neurčitými vazbami to však tak jednoduché není.

Podle toho, kolik informací o modelovaném systému máme, lze modely dělit do tří skupin:

- white-box
- gray-box
- black-box

White-box: Přesný model systému

Zcela odvozen ze základních zákonů fyziky, chemie, ekonomie, . . . (first-principle models).

Všechny rovnice a parametry lze určit na teoretické úrovni.

Také kombinace modelů, i v případě, že některé parametry odhadnuty z dat.

Charakteristická vlastnost: nezávislé na datech, parametry přímo interpretovatelné jako základní veličiny (hmotnost, rychlost, národní důchod, . . .).

Black-box: Model systému odvozený z naměřených dat

Zcela závislé na měřených datech.

Jak **struktura modelu**, tak i **parametry** jsou odvozeny experimentálně.

Nevyužíváme žádnou apriorní informaci o modelovaném systému.

Parametry typicky nemají žádný vztah k základním veličinám.

Black-box: Model systému odvozený z naměřených dat

Algoritmy strojového učení s učitelem: Známe vstupní a výstupní data, použijeme generický model, jehož parametry nastavíme.

Vyžaduje trénovací a testovací data

Velmi rozšířené v inženýrské praxi

Příklad: AR (autoregresní modely), ANN (neronové sítě), SVM (support vector machines), GP (Gaussovské procesy)

Dělíme na

- parametrické
- neparametrické

ČVUT ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Parametrické modely předpokládají existenci konečné množiny parametrů θ. Jakmile jednou najdeme parametry, budoucí predikce modelu x nezávisí na množině právě pozorovaných dat $\mathcal{D}$, je tedy

$$P(x|\theta, \mathcal{D}) = P(x|\theta).$$

Složitost modelu je ohraničená, i když množství pozorovaných dat ohraničené není.

Tyto modely nejsou flexibilní, všechna informace o $\mathcal{D}$ je obsažena v θ.

Black-box: Neparametrické modely

Neparametrické modely nepředpokládají, že data lze reprezentovat distribuční funkcí založenou na konečné množině parametrů. Mnohdy je ale definujeme ze předpokladu, že θ má nekonečnou dimenzi. Typicky je θ nějaká funkce.

V tomto případě může θ obsáhnout rostoucí objem informace o datech tak, jak $\mathcal{D}$ roste.

Tyto modely jsou složitější, ale zato jsou flexibilní – dokážou brát v úvahu i evidenci obsaženou v nově přicházejících datech.

Black-box: Bayesovské neparametrické modely

Jednoduchý (a často jediný použitelný) nástroj na modelování složitých vztahů v datech.

BIG DATA!

Příklady black-box modelů

Parametrické	Neparametrické	Aplikace
polynomiální regrese	Gaussovský proces	aproximace fcí
logistická regrese	GP klasifikátor	klasifikace
směsové modely, *k*-means	směs Dirichletovských procesů	shlukování
skryté Markovské modely (HMM)	nekonečné HMM	časové řady
faktorová analýza, PCA, PMF	nekonečné latentní FM	hledání příznaků

Gray-box: Některé části nelze popsat fyzikálně

Kompromis / kominace mezi white-box a black-box modelem. Možné jsou všechny možné kombinace.

Jeho popis může obsahovat také kvalitativní informace o modelovaném systému, např. popis chování systému ve formě pravidel.

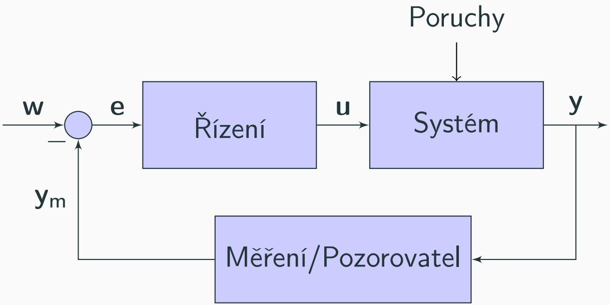
Charakteristika: slučuje všechny možné snadno dostupné zdroje informací o systému.

Struktura modelu bývá odvozena z expertních znalostí, **parametry** modelu jsou ale určeny z dat.

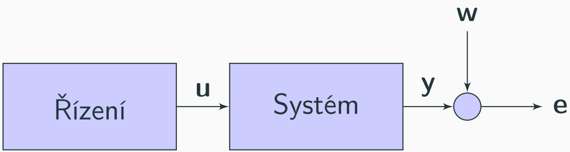
White-box

	White-box	Gray-box	Black-box
Zdroje informací	základní principy znalosti	kvalitativní znalosti pravidla částečné znalosti a data	experimenty data
Vlastnosti	dobrá extrapolace dobré pochopení vyzoká spolehlivost škálovatelnost		krátká doba vývoje nevyžaduje expertní znalosti lze i pro neznámé procesy
Nevýhody	časově náročné vyžaduje znalosti znalosti omezují přesnost pouze pro známé procesy		nelze extrapolovat není škálovatelné přesnost omezena daty málo pochopení
Aplikační oblasti	plánování konstrukce, design spíše jednoduché procesy		pouze pro existující procesy spíše složité procesy

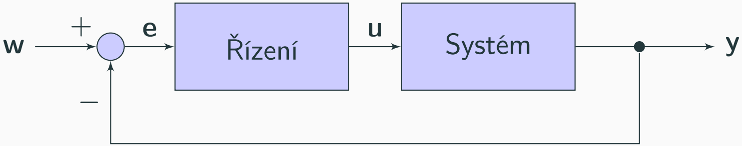
Obsah přednášky


Poruchy
w
e
Řízení
u
Systém
y
—
ym
Měření/Pozorovatel

Ovládání:



Regulace:



Dosažitelnost, řiditelnost

Definice (Dosažitelnost)

Stav $\mathbf{x}$ je dosažitelný, existuje-li řízení $\mathbf{u}(t)$, které za konečný čas převede počáteční stav $\mathbf{x}(t_0) = 0$ do stavu $\mathbf{x}$. Jsou-li všechny stavy systému dosažitelné, říkáme, že systém je dosažitelný.

Definice (Řiditelnost stavu)

Stav $\mathbf{x}$ je řiditelný, existuje-li řízení $\mathbf{u}(t)$, které v konečném čase převede tento stav do počátku (do nulového stavu). Jsou-li všechny stavy systému řiditelné, říkáme, že systém je řiditelný.

Definice (Řiditelnost na výstupu)

Systém je řiditelný na výsupu, pokud existuje funkce řízení $\mathbf{u}(t)$ taková, že převede výstup $\mathbf{y}(t_0)$ na $\mathbf{y}(t_1)$ v konečném čase $t_1 - t_0$.

Definice (Pozorovatelnost)

Systém je pozorovatelný, když změřením vstupu a výstupu na konečném časovém intervalu je možno určit hodnotu stavu systému na počátku měření.

Měřením lze zjistit vlastnosti pouze u pozorovatelné části systému.

Definice (Pozorovatel stavu)

Pozorovatel stavu je systém, který poskytuje odhad vnitřního stavu daného reálného systému z měření vstupu a výstupu reálného systému.

Pozorovatel je obvykle implementován počítačem a poskytuje základ pro řadu praktických aplikací.

Typické úlohy

- Kompenzace vlivu poruchových veličin
  (angl. *Disturbance Rejection*)
- Problém regulátoru
  (angl. *Regulator Problem*)
- Problém sledování
  (angl. *Tracking Problem*)
- Optimální řízení
  (angl. *Optimal Control*)

Na systém vždy působí celá řada poruchových veličin.

Poruchová veličina měřitelná $\Rightarrow$ její vliv lze kompenzovat v řídicím členu. Někdy lze vliv poruchy kompenzovat beze zbytku.

Řízený systém je invariantní vzhledem k poruše: porucha se na výstupu systému vůbec neprojeví.

Dynamické vlastnosti samotného systému jsou někdy nevyhovující.

Účelem je navrhnout takovou strukturu řízení, aby celý systém měl vyhovující dynamické vlastnosti.

Často jde o stabilizaci systému, jenž je nestabilní.

ČVUT ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Požadujeme, aby $\mathbf{y}(t)$ co nejlépe sledovalo referenční průběh $\mathbf{w}(t)$.

Minimalizace regulační odchylky $\mathbf{e}(t)$

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{w}(t) - \mathbf{y}(t)$$

Dodatečná omezení:

- velikost řídicí veličiny,
- velikost celkové řídicí energie, ...

V moderní teorii řízení jsou všechny požadavky na řízení shrnuty do kritéria kvality řízení J.

Návrh řídicího zásahu $\to$ optimalizační problém minimalizace J.

Dva zásadní problémy:

- volba kritéria kvality řízení,
- řešitelnost takto formulovaného optimalizačního problému.

Nejvíce používaným kritériem kvality řízení je kvadratické kritérium

$$J = \mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{R}\mathbf{x} + \cdots$$

Pro lineární systémy vede na lineární zákon řízení

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

kde $\mathbf{K}$ je matice, kterou lze spočítat z tzv. *Ricattiho rovnice*.

Bellmanova funkce

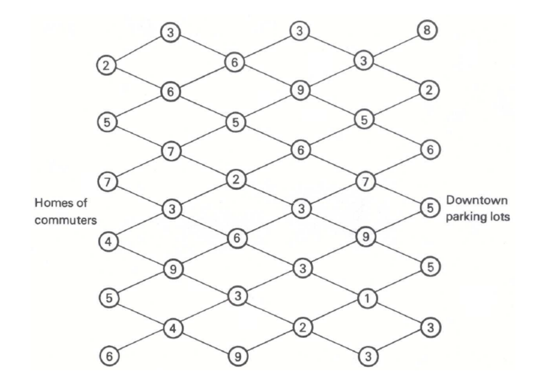
Optimalizace: Snaha dosáhnout určitého cíle (minimalizace nákladů, maximalizace výdělku, minimalizace cestovní doby)

Definice (Bellmanův princip optimality)

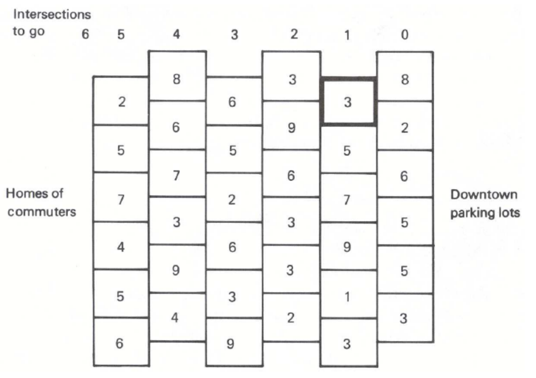
Optimální řídicí strategie má tu vlastnost, že bez ohledu na počáteční stav a původní rozhodnutí představují ostatní rozhodnutí opět optimální strategii s ohledem na stav, vyplývající z prvního rozhodnutí.

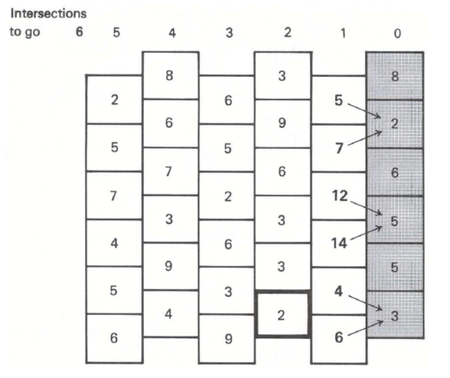
Lze tedy postupovat zpětně (tzv. angl. *backtracking* nebo angl. *rollout*)

Hledáme nejrychlejší cesty z domů clevo k nákupním střediskům vpravo. Uzly grafu jsou křižovatky, ohodnocení uzlů je zpoždění.

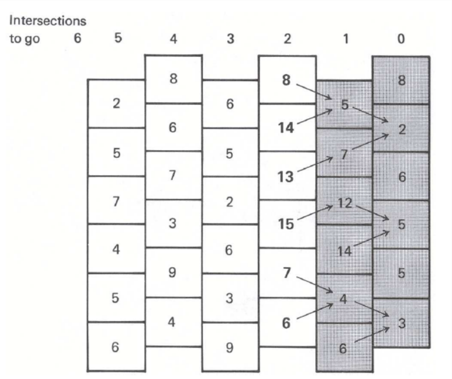


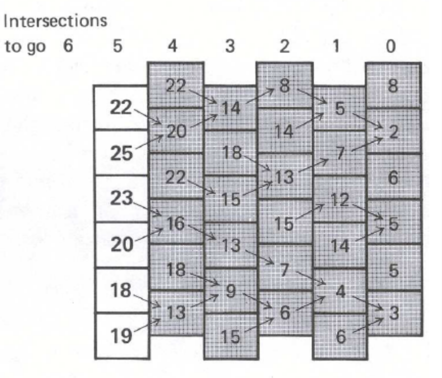
Dynamické programování



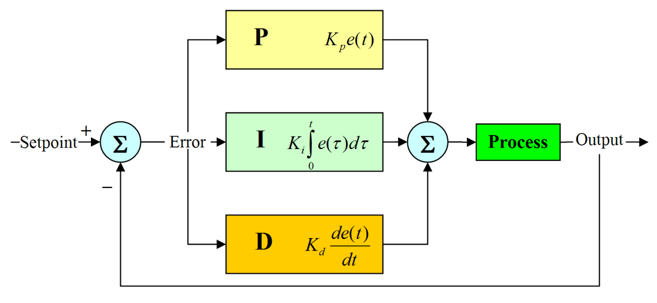

Intersections
to go 6 5 4 3 2 1 0
2
5
7
4
5
6
8
6
7
3
9
4
6
5
2
6
3
9
3
9
6
3
3
2
5
7
12
14
4
6
8
2
6
5
5
3

Dynamické programování

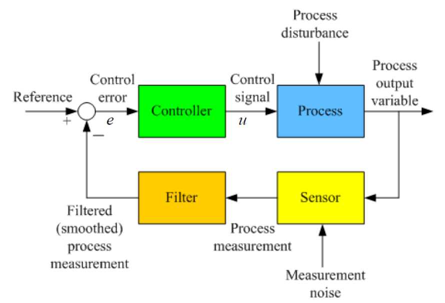



Intersections
to go 6 5 4 3 2 1 0
22
25
23
20
18
19
22
20
22
16
18
13
14
18
15
13
9
15
8
14
13
15
7
6
5
7
12
14
4
6
8
2
6
5
5
3

$$u(t) = u_0 + \underbrace{K_\mathrm{p} e(t)}_{u_\mathrm{p}} + \underbrace{\frac{K_\mathrm{p}}{T_\mathrm{i}} \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{u_\mathrm{i}} + \underbrace{K_\mathrm{p} T_\mathrm{d} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t)}_{u_\mathrm{d}}$$



$$u(t) = u_0 + \underbrace{K_\mathrm{p} e(t)}_{u_\mathrm{p}} + \underbrace{\frac{K_\mathrm{p}}{T_\mathrm{i}} \int_0^t e(\tau)\,\mathrm{d}\tau}_{u_\mathrm{i}} + \underbrace{K_\mathrm{p} T_\mathrm{d} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e(t)}_{u_\mathrm{d}}$$



Obsah přednášky

Popis dynamického systému

Příklady na stavový popis dynamických systémů

Úrovně modelování

Základy teorie řízení

Model-prediktivní řízení

Model-prediktivní řízení

Idea: Použijeme model systému k posouzení budoucích dopadů současných akcí.

- dnes velmi rozvinuté regulační paradigma
- základ: 1970tá léta, Shell Oil, petrochemie
- důvod: úspora nákladů, lze se více přiblížit mezním parametrům

V každém okamžiku vzorkování k používáme

1. matematický model řízené soustavy
   dynamický model, omezující podmínky
2. (konečnou) historii hodnot regulovaných veličin až po k-tou
3. (konečnou) historii hodnot řízení
4. požadovaný průběh regulovaných veličin
   v rámci uvažovaného horizontu predikce h

Model-prediktivní řízení

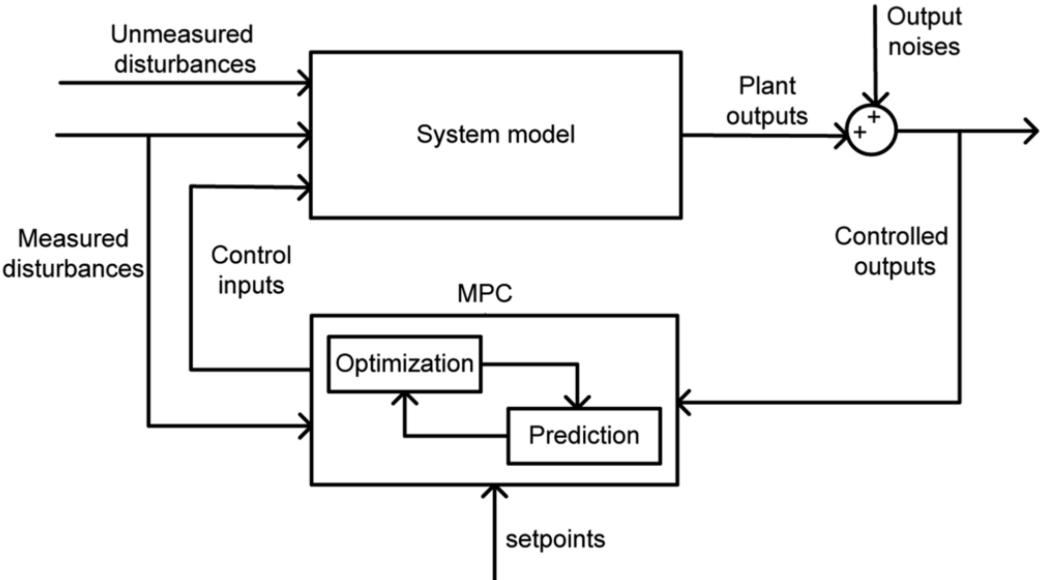
Máme:

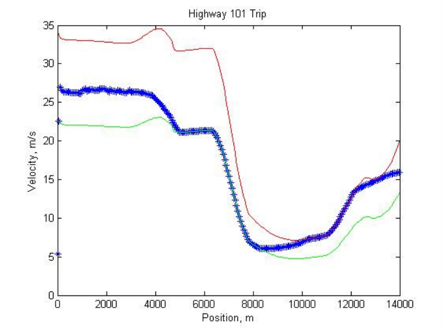
- *stavový vektor* v kroku k, $\mathbf{x}[k]$,
- *diskrétní model* $\begin{cases} \mathbf{x}[k+1] = f(k, \mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k]) \\ \mathbf{y}[k] = g(k, \mathbf{x}[k], \mathbf{u}[k]) \end{cases}$

Vektor vstupů $\mathbf{u}[k]$ minimalizuje **ztrátovou funkci** $J(\mathbf{x}[k])$

- jednokroková minimalizace $J(\mathbf{x}[k])$ není globálně optimální
- použijeme model systému pro h-krokovou predikci $\mathbf{x}[k+1], \ldots, \mathbf{x}[k+h]$
- rozšíříme $\mathbf{x}[k]$ na $\mathbf{x}[h|k] = [\mathbf{x}[k]; \mathbf{x}[k+1]; \ldots; \mathbf{x}[k+h]]$
- počítáme $J(\mathbf{x}[h|k])$ pro h kroků

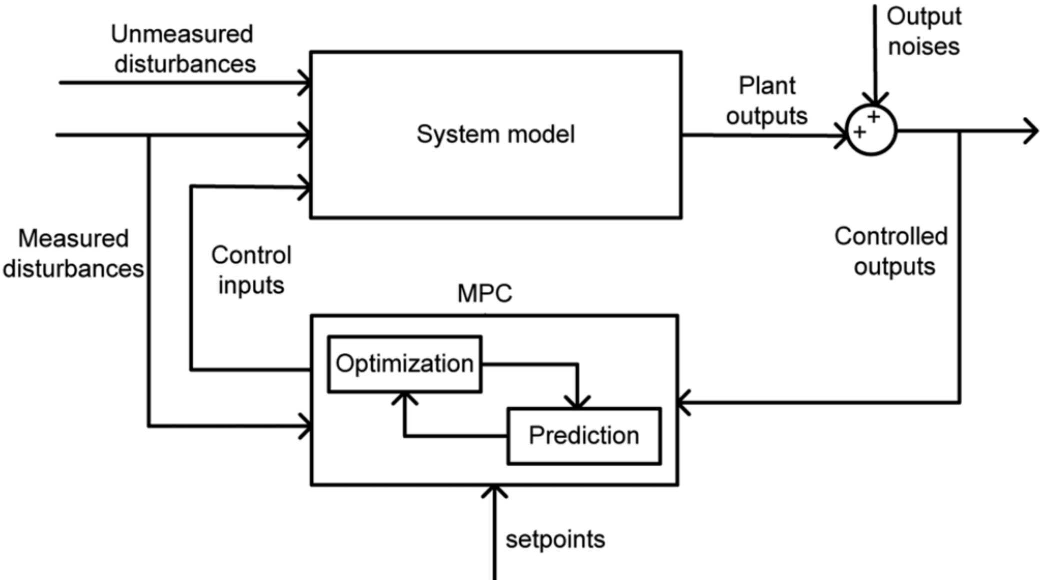
ČVUT
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

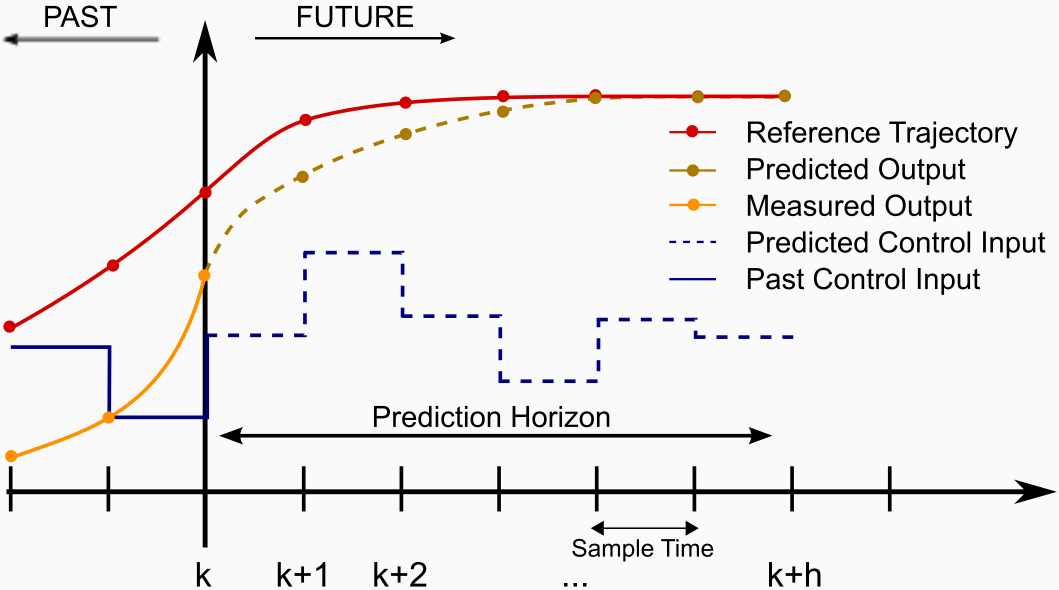




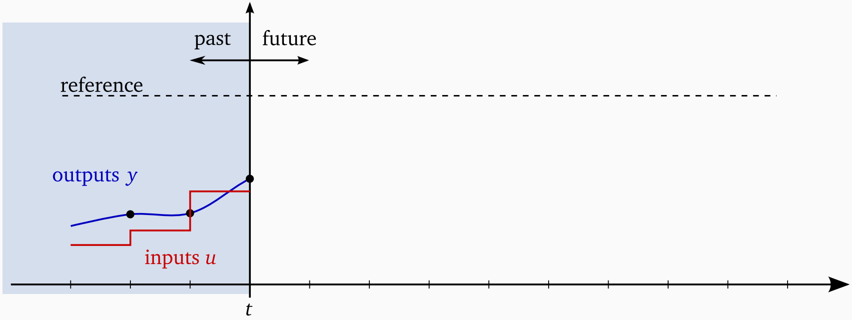
- Návrh MPC řadiče nad ACC, regulujícího požadovanou rychlost tak, aby vozidlo jelo co nejhospodárněji
- Predikce: maximální + minimální rychlost dopravy, sklon
- Omezení: maximální + minimální rychlost dopravy a vozidla

Převzato z Borelli: ME290E a Balandat: EE128


Unmeasured disturbances
Output noises
System model
Plant outputs
+
+
Measured disturbances
Control inputs
Controlled outputs
MPC
Optimization
Prediction
setpoints

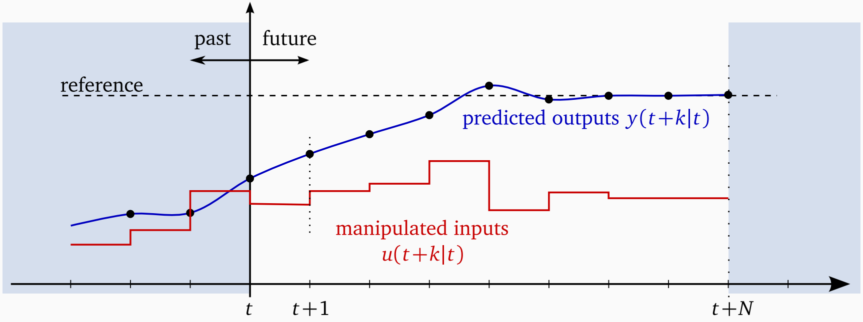

PAST
FUTURE
Reference Trajectory
Predicted Output
Measured Output
Predicted Control Input
Past Control Input
Prediction Horizon
Sample Time
k
k+1
k+2
...
k+h

Model-prediktivní řízení



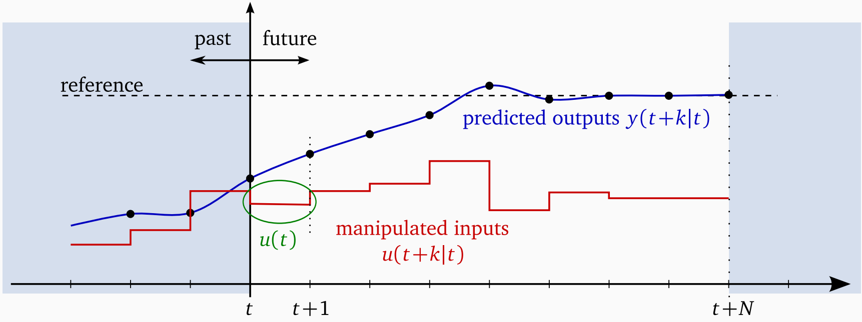
- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$

Model-prediktivní řízení



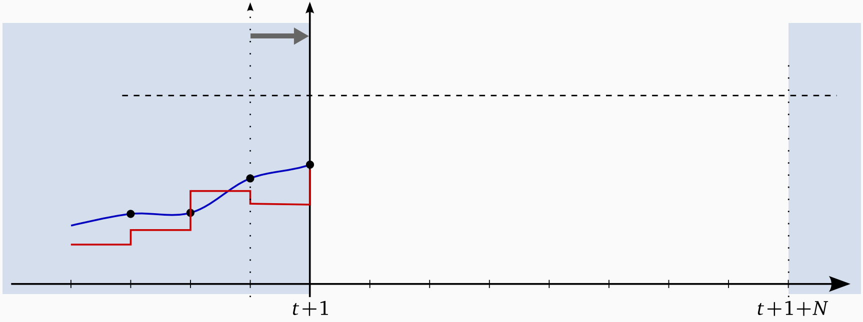
- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$

Model-prediktivní řízení



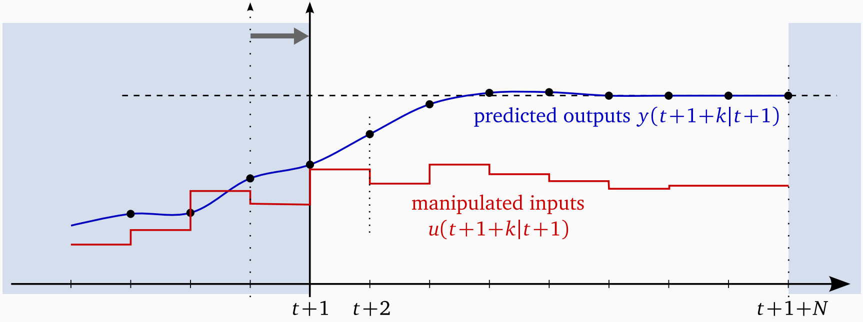
- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$

Model-prediktivní řízení

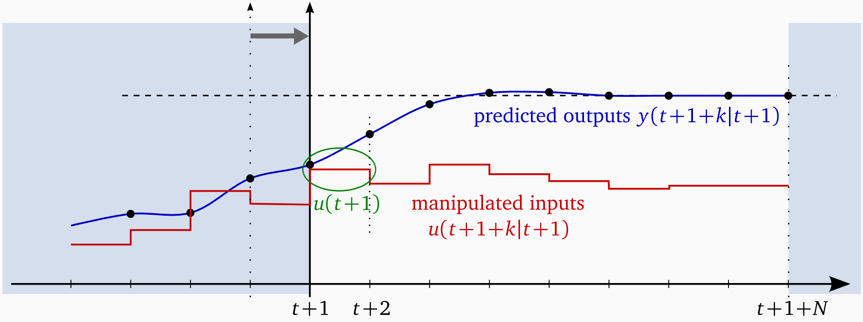


- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$

Model-prediktivní řízení



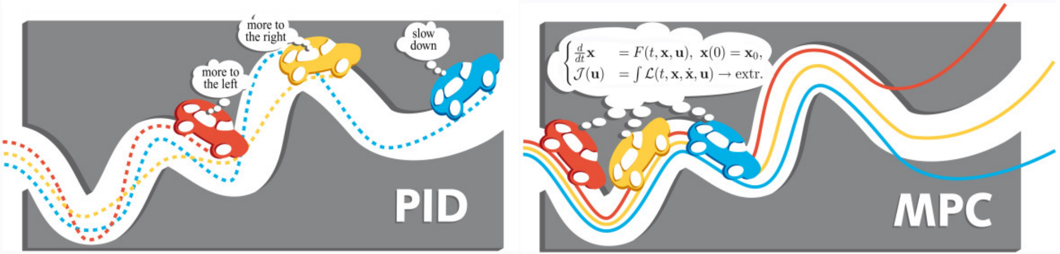
- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$



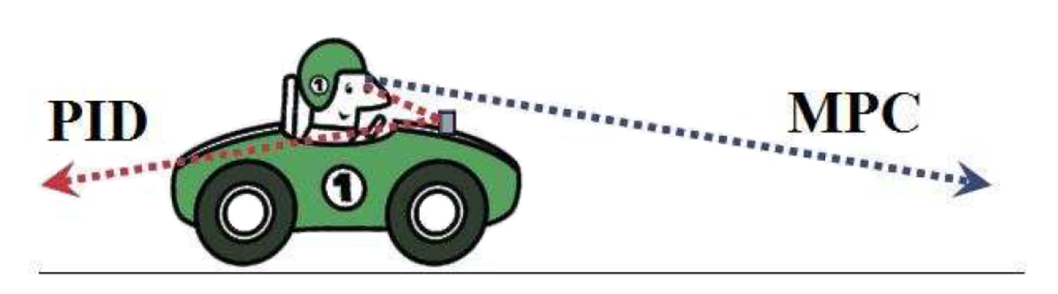
- Podle $x(t)$ optimalizujeme vstupy na horizontu délky N
- Z celé predikce použijeme pouze první optimální krok $u(t)$
- Postoupíme o jeden časový krok a posuneme horizont
- Vše opakujeme v čase $t+1$

MPC reaguje na predikovanou budoucí hodnotu regulačních odchylek

PID reaguje jen na současné a minulé hodnoty.



Používat PID je jako řídit auto na základě pohledu do zpětného zrcátka (Hlava, 2007).



Omezení hodnot akčních veličin:

$$u_{\min} \leq u[k+p|k] \leq u_{\max}, \qquad p = 0, 1, \ldots, h$$

Omezení hodnot přírůstků akčních veličin:

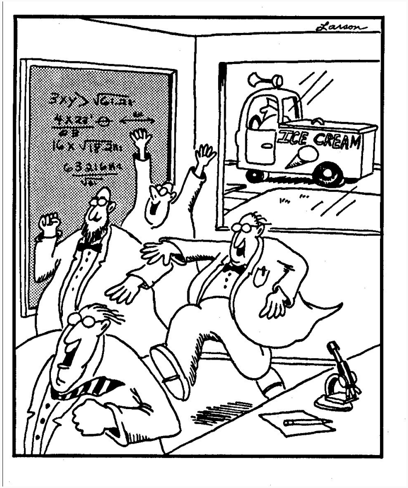
$$\left|\Delta u[k+p|k]\right| \leq \Delta u_{\max}, \qquad p = 0, 1, \ldots, h$$

Omezení hodnot regulovaných veličin:

$$y_{\min} \leq y[k+p|k] \leq y_{\max}, \qquad p = h, n+1, \ldots, N$$

- mohou být obecně také proměnná v čase,
- u regulovaných veličin $\rightarrow$ $\pm$ prázdná množina přípustných řešení

ČVUT
ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE



Děkuji za pozornost. Až budete utíkat, prosím opatrně.