Modelování systémů a procesů (611MSP)

Děčín – přednáška 1

Vlček, Kovář, Přikryl

1. března 2012

Obsah

1 Organizace

1.1 Přednášející

Kontakty

Přednášející Praha:

- prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc. (vlcek@fd.cvut.cz) video přednášky: http://www.civ.cvut.cz nebo http://zolotarev.fd.cvut.cz/msp

Přednášející Děčín a cvičící:

- Ing. Bohumil Kovář, Ph.D. (kovar@utia.cas.cz)
- Dr. Ing. Jan Přikryl (prikryl@fd.cvut.cz)

1.2 Základní informace

Základní informace

- **Domovská stránka předmětu** http://zolotarev.fd.cvut.cz/predmety/msp/
- **Rozsah matematických znalostí** Matematika pro letecké obory *(některé kapitoly)* http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml1/

Modelování systémů a procesů – 611MSP

Organizace výuky předmětu

- Přednášky
  - prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc. studijní materiály (pdf, video)
  - Dr. Kovář, Dr. Přikryl přednášky v pdf pro Děčín a kombinované studium
- Cvičení – prezenční forma studia
  - Řešení úloh na počítači (Matlab & Simulink)
  - Průběžné testy

Omezený počet hodin výuky ⇒ NUTNÁ DOMÁCÍ PŘÍPRAVA

1.3 Zápočet a zkouška

Zápočet a zkouška

Celkem bodů (cvičení + zkouška)	50 bodů
Cvičení	40 bodů (30 bodů ke zkoušce)
Požadované minimum pro zápočet	25 bodů ze 40

[7mm]

Počet bodů	Známka	ECTS
45 až 50	výborně	A
40 až 44	velmi dobře	B
35 až 39	dobře	C
30 až 34	uspokojivě	D
25 až 30	dostatečně	E
0 až 24	nedostatečně	F

Nezbytné vstupní znalosti

- Lineární algebra, operace s maticemi a vektory, výpočet determinantu
- Řady, výpočet součtu a konvergence řad
- Určité a neurčité integrály
- Komplexní čísla
- Diferenciálních rovnice a jejich řešení
- Základní pojmy ze systémové analýzy
- Základy programovacích jazyků

1.4 Literatura

Literatura

[1] D. Lomen & D. Lovelock: Differential Equations,graphics, models, data, John Wileys and Sons. Inc., 1999.

[2] G. E. Carlson: Signal and Linear System Analysis with MATLAB, John Wileys and Sons. Inc., 1998.

[3] R. G. D. Allen: Matematická ekonomie. ACADEMIA, Praha, 1971.

[4] M. Svítek, J. Borka, M. Vlček: Modelování systémů a procesů. Vydavatelství ČVUT, Praha, 2001.

[5] P. Horáček: Systémy a modely. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1999.

[6] V. Soukup: Teorie dynamických systémů. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1998.

[7] P. Zítek, R. Petrová: Matematické simulační modely. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1996.

2 Úvod

2.1 Motivace

Proč modelování systémů?

Jak ověříme...

- správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- pevnost mostu, který nebyl ještě postaven?
- vlastnosti nových mechanických, resp. elektronických zařízení?
- bezpečnost SW?

Pokud nemůžeme prokázat určité vlastnosti samotného systému, můžeme se pokusit prokázat hledané vlastnosti na jeho modelu!

Co je modelování?

Model

Za model můžeme pokládat náhradu nebo zjednodušení **skutečného objektu reálného světa** z hlediska jeho vlastností a funkčnosti.

Modelování je možné pouze pokud zavedeme **určitý stupeň** abstrakce a aproximace

Význam modelování

Alternativa experimentu

- Bez nutnosti fyzické existence objektu
- Časová a finanční úspora

Získání jinak neměřitelných dat

- Stavy uvnitř tělesa bez nutnosti destrukce
- Příliš malý nebo velký rozměr

Predikce

Časových řad v ekonomických, sociologických, resp. ekologických systémech.

Čím je ovlivněna kvalita modelu systémů

Vstupní data se mohou měnit!

Počáteční stav systému a jeho interakce s okolím ovlivňuje vstupní data.

Numerické nepřesnosti

Použitých matematických metod.

Další zdroje nepřesností

Stupeň abstrakce, vnější vlivy, ...

Pokud vytvořený model nesplňuje naše požadavky, pak musíme znovu analyzovat reálný systém, odstranit nedostatky předchozího modelu a vytvořit model lepší.

Matematika jako nástroj

Matematika

- je sama systémem (axiomy, tvrzení, důkazy)
- umožňujě nám díky své logické struktuře odpovědět na otázky, zda jsou naše modely navrženy správně.
- ⇒ matematika je pro nás nástrojem.

Matematické modelování?

Pokud chci popsat nějaký systém, musím ho předem důkladně analyzovat. Existují případy, kdy nemohu systém ověřit testováním, ale musíme bezesporně dokázat správnou funkci. Zde je prostor pro matematické modelování.

V předmětu se naučíte

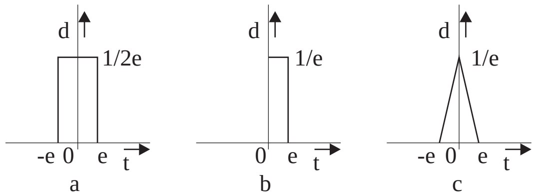
1. Správně formulovat úlohu nebo problém.
   - Rozlišovat, co je podstatné a co lze zjednodušit.
2. Ovládat některé matematické nástroje a software.
   - Matlab
   - Simulink
3. Používat matematické nářadí
   - Laplaceova tranfomace
   - z-Transformace
4. Jak interpretovat a vyhodnotit výsledky.
   - Grafické znázornění vstupních a výstupních dat

3 Signály

Vstupy a výstupy

3.1 Základní spojité signály

Základní spojité signály



Obrázek 1: Konečná reprezentace $\delta_\epsilon(t)$ pro $\epsilon > 0$.

Jednotkové impulsy

Tyto funkce jsou definovány na časovém intervalu pro všechna t a jejich nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu $t = 0$. Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé $\varepsilon > 0$.

Definujme funkci $\delta(t)$ jako $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t)$.

Základní spojité signály

Jednotkový impuls

Funkce $\delta(t)$ se nazývá Diracův impuls, Diracova δ-funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota δ-funkce pro $t \neq 0$ je $\delta(t) = 0$. Její hodnota v $t = 0$ není definována jako funkce, a proto se používá integrální definice

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = 1$$

pro každé $\epsilon > 0$.

Jednotkový skok

Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena $\mathbb{1}(t)$ a je definována jako

$$\mathbb{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0\,. \end{cases}$$

Reálná exponenciála

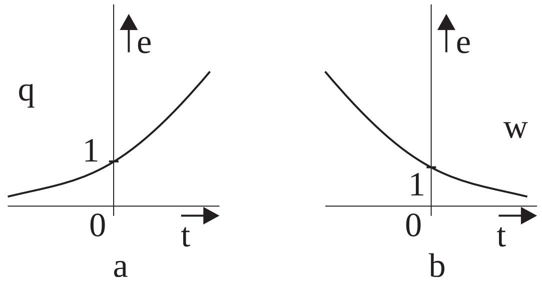
Uvažujme exponenciální funkci $f(t) = e^{\alpha t}$, kde α je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.

Periodická funkce

O spojitém signálu $f(t)$ říkáme, že je periodický s periodou T_P, jestliže platí

$$f(t + T_P) = f(t)$$

pro všechna T_P a platí



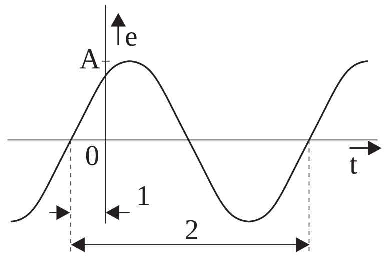
Obrázek 2: Reálná exponenciála a) pro $\alpha > 0$, b) pro $\alpha < 0$.

$$f(t) = f(t + T_P) = f(t + 2T_P) = \cdots = f(t + kT_P)$$

pro všechna k celá čísla.

Sinusová funkce

$$f(t) = A \sin(\omega t + \Phi),$$



Obrázek 3: Sinusový signál.

Konstanty A, ω a Φ se nazývají amplituda, úhlová frekvence a fázový posuv. Sinusovka je periodická se základní periodou $T_P = 2\pi/\omega$.

3.2 Základní diskrétní signály

Vznik diskrétních signálů

Přirozeně

- např. průměrné denní teploty,
- denní kurzy,
- počty studentů.

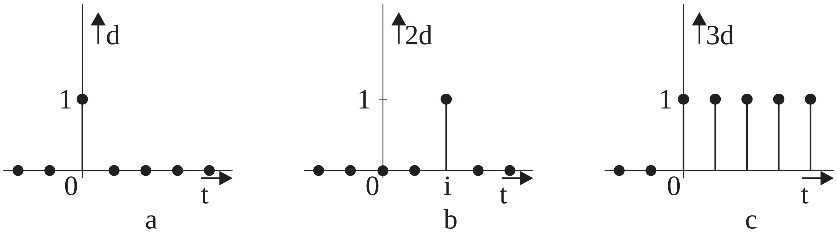
Vzorkováním spojitých signálů

- naměření teploty každou hodinu,
- měřením průtoku.

Diskrétní jednotkový impuls

Diskrétní jednotkový impuls $\delta(n)$ je definován vztahem

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0\,. \end{cases}$$



Obrázek 4: Diskrétní signály a) jednotkový impuls, b) posunutý jednotkový impuls, c) jednotkový skok.

Diskrétní jednotkový skok

Diskrétní jednotkový skok $\mathbb{1}(n)$ je definován vztahem

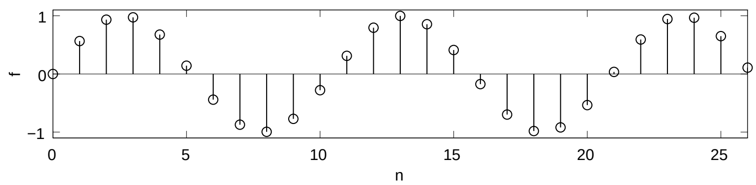
$$\mathbb{1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases}$$

Diskrétní sinusová posloupnost

Mějme sinusový signál $f(t) = \sin\,\omega_0 t$ s periodou $T_P = 2\pi/\omega_0$. Pokud tento signál vzorkujeme s periodou $T > 0$, získáme diskrétní sinusový signál

$$f(nT) = \sin\,\omega_0 nT\,,$$

kde $n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$. Pokud není nutné uvádět periodou T, píšeme pouze $f(n)$.



Diskrétní sinusová posloupnost

Diskrétní signál $f(n)$ je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo N takové, že platí

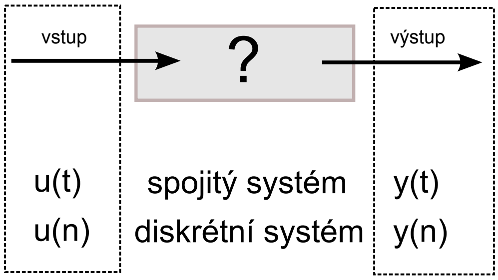
$$f(n) = f(n + N) = f(n + 2N) = \cdots = f(n + kN)$$

pro všechna n z intervalu $(-\infty,\ \infty)$ a pro libovolné celé k. N se nazývá perioda diskrétního signálu.

4 Popis systémů

4.1 Diskrétní systém

Spojitý a diskrétní systém



Diskrétní systém

Odezva na jednotkový impuls $\delta(n)$

se nazývá *impulsní odezva* $h(n)$

$$h(n) = \mathcal{T}\{\delta(n)\}\, \& h(n,m) = \mathcal{T}\{\delta(n-m)\}\,.$$

Odezvu na jednotkový skok $\mathbb{1}(n)$

$$\mathbb{1}(n) = \sum_{m=0}^{n} \delta(n-m) = \\ \delta(n) + \delta(n-1) + \cdots + \delta(1) + \delta(0)\,,$$

nazveme *přechodovou odezvou* $s(n)$.

Konvoluce

Konvoluční suma

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)u(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)u(n-k),$$

která bývá občas značená

$$y(n) = h(n) * u(n)\,.$$

4.2 Lineární a nelineární

Lineární systém

Řekli jsme si, že systém není nic jiného, než černá skříňka, *black box*, kterou se pokoušíme nejprve identifikovat a poté reprodukovat. Při identifikaci se nejprve ptáme, zda se jedná o systém *lineární*.

Linearita

V matematice označujeme funkci $f(x)$ jako lineární v případě, že je

1. aditivní $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ a
2. homogenní, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$.

Princip superpozice

Nechť $u(n)$ je vstupní a $y(n)$ výstupní signál systému. Funkce $\mathcal{T}$ definuje vztah mezi vstupem a výstupem. Pro lineární systém pak platí tak zvaný *princip superpozice*.

Princip superpozice

Mějme dva různé vstupní signály $u_1(n)$ a $u_2(n)$. Výstupy systému jsou

$$y_1(n) = \mathcal{T}\{u_1(n)\}$$
$$y_2(n) = \mathcal{T}\{u_2(n)\}$$

a pro lineární systém pak musí pro $u(n) = \alpha u_1(n) + \beta u_2(n)$ platit

$$\alpha y_1(n) + \beta y_2(n) = \mathcal{T}\{\alpha u_1(n) + \beta u_2(n)\}$$

Příklad lineárního systému $y(n) + a\,y(n-1) = u(n)$

Kombinací dvou různých vstupních signálů $u(n) = a_1 u_1(n) + a_2 u_2(n)$

$$a_1 [y_1(n) + a y_1(n-1)] = a_1 u_1(n)$$
$$a_2 [y_2(n) + a y_2(n-1)] = a_2 u_2(n)$$

dostaneme lineární kombinaci výstupních signálů a pro $y(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$ platí

$$y(n) + a\,y(n-1) = u(n)$$

4.3 Časově invariantní, resp. stacionární systém

Časově invariantní systém

Systém se nazývá *časově invariantní*, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n - m$ nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

$$\begin{aligned} \text{dnes} \ldots \quad y(n) &= \mathcal{T}\{x(n)\} \\ \text{včera} \ldots \quad y(n-1) &= \mathcal{T}\{x(n-1)\} \\ &\vdots \\ y(n-m) &= \mathcal{T}\{x(n-m)\} \end{aligned}$$

Časově invariantní systém

Mějme mikroekonomický model variace ceny popsaný diferenční rovnicí

$$y(n) + a\,y(n-1) = u(n).$$

Vzhledem k tomu, že koeficient a u $y(n-1)$ není funkcí času, pak rovnice při změně z $n \to n-m$ zachovává tvar a jedná se tedy o časově invariantní systém.

Mějme diferenční rovnici

$$y(n) + n \cdot y(n-1) = x(n).$$

V tomto případě je koeficient n u $y(n-1)$ funkcí času a systém je tedy časově proměný.

Kauzální systém

Výstupní signál $y(n)$ kauzálních systémů závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu $x(x), x(n-1), \ldots, x(n-m)$.

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)\,u(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)\,u(n-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\,x(n-k)$$

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a *kauzální* systém má tvar

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)\,u(n-k)$$

Autonomní systém

Za autonomní systém považujeme takový, který nemá vstup. Je tedy popsán například rovnicí

$$y(n) + a\,y(n-1) = 0$$

V případě, že systém má vstup $u(n)$

$$y(n) + ay(n-1) = u(n),$$

systém pokládáme za neautonomní.

5 Přehled teorie systémů

5.1 Systém a podsystém

Systém

Definovat systém je složité ...

Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

- Systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí.
- Systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.

5.2 Popis systému

Vnější popis

Používáme

- černá skříňka, neznámé vlastnosti
- vektor vstupu u, vektor výstupních veličin y

Popisujeme

- diferenciální rovnicí řádu > 1 pro systémy se spojitým časem
- diferenční rovnicí řádu > 1 pro systémy s diskrétním časem

Když na vstup systému přivedeme definovaný signál, obdržíme na opačném konci výstupní odezvu.

Analýzou vstupního a výstupního signálu můžeme systém identifikovat.

Vnitřní popis

Používáme

- stavové modely
- transformují vektor vstupů u na vektor vnitřních stavů x a ten na vektor výstupních veličin y

Popis

- soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem

- soustavou diferenčních rovnic prvního řádu pro systémy s diskrétním časem.

Stavový popis vystihuje vnitřní strukturu systému.

6 Matlab

MATLAB a SIMULINK

MATLAB je systém firmy The Mathworks Inc. pro matematické modelování (hlavně pomocí matic), vizualizaci a mnoho dalšího. Je dostupný na mnoha systémech (Windows, Mac, mnoho Unixů včetně Linuxu atd.). Původně vznikl nad fortranskými knihovnami pro maticové počítání Linpack a Eispack. Obsahuje jednoduchý skriptovací jazyk a nechá se snadno rozšiřovat o další funkce pomocí tzv. M-souborů (M-files). Balíky funkcí se nazývají toolboxy. Pro simulace systémů se používá *SIMULINK*.