Modelování systémů a procesů (611MSP)

Děčín – přednáška 2

Vlček, Kovář, Přikryl

2. přednáška 611MSP
čtvrtek 15. března 2012

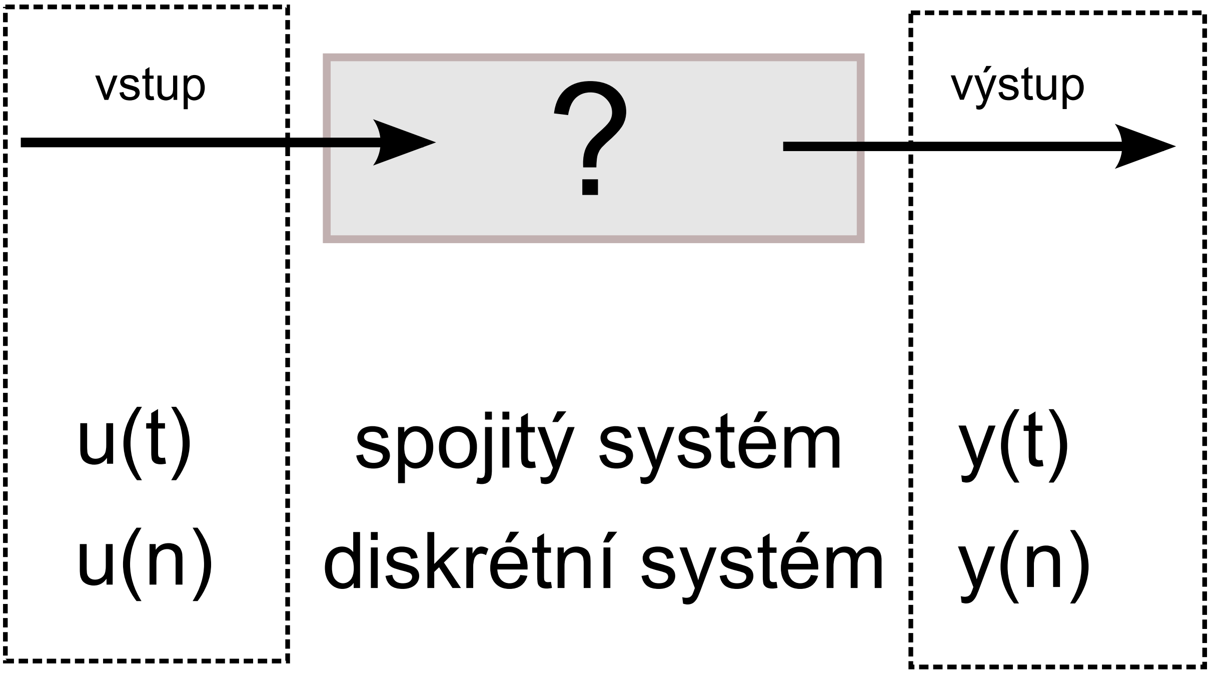
Obsah

1 Vnější a vnitřní popis systému

1.1 Vnitřní popis pro systém druhého řádu

Vstupy a výstupy

Systém druhého řádu



Diferenciální rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y''(t) + a_1\, y'(t) + a_0\, y(t) = u(t) \tag{1}$$

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = c_2, \tag{2}$$

udává vztah vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ spojitého lineárního stacionárního systému.

Systém druhého řádu

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$x_1(t) = y(t),$$
$$x_2(t) = y'(t).$$

Systém druhého řádu

Dosadíme za $y'(t) = x_2(t)$ a $y''(t) = x_2'(t)$ do původní diferenciální rovnice a obdržíme

$$x_2'(t) + a_1\, x_2(t) + a_0\, x_1(t) = u(t).$$

Současně platí

$$x_1'(t) = y'(t) = x_2(t).$$

Systém druhého řádu

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

nebo

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B} u(t)\,,$$

resp.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Systém druhého řádu

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0\, u(t)\,.$$

Matice **D** je tedy nulová a pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\,.$$

Lineární systém, který má matici **D** nulovou, se nazývá ryzí systém. Je vhodné podotknout, že počáteční podmínky se transformují do stavového popisu takto

$$y(0) = x_1(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = x_2(0) = c_2.$$

1.2 Obecný systém n-tého řádu

Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Předpokládejme opět, že systém je popsán diferenciální rovnicí

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t) \tag{3}$$

Ukážeme nyní, jak se koeficienty diferenciální rovnice objeví ve stavových maticích. Postup je zobecněním předcházejícího příkladu.

Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Stavové veličiny volíme jako derivace hledaného řešení $y(t)$ takto

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= y^{(1)}(t), \\ x_3(t) &= y^{(2)}(t), \\ &\vdots \\ x_n(t) &= y^{(n-1)}(t), \end{aligned}$$

Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Ze soustavy a diferenciální rovnice plyne postupně

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= x_2(t), \\
x_2'(t) &= x_3(t), \\
&\vdots \\
x_{n-1}'(t) &= x_n(t), \\
x_n'(t) &= u(t) - a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) - \ldots - a_{n-1} x_n(t).
\end{aligned}$$

Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

V souladu s obecným značením pro stavový popis LTI systémů označíme

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ & & \vdots & & & \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & \ldots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Dále platí

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} ,$$

takže

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} . \tag{4}$$

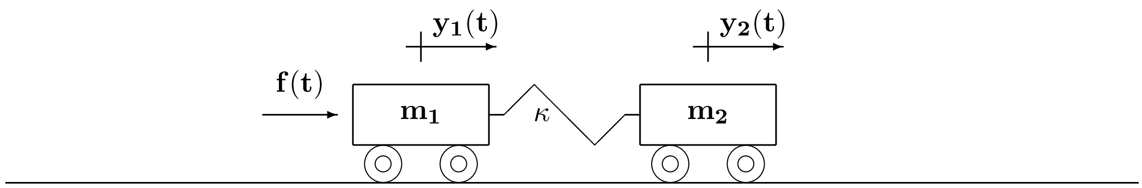
Stavové rovnice z diferenciální rovnice n-tého řádu

Počáteční podmínky mají tvar

$$\begin{aligned} y(0) &= x_1(0) = & c_1 \, , \\ y^{(1)}(0) &= x_2(0) = & c_2 \, , \\ y^{(2)}(0) &= x_3(0) = & c_3 \, , \\ & \vdots & \\ y^{(n-1)}(0) &= x_n(0) = & c_n \, . \end{aligned}$$

1.3 Příklad

Příklad Dva vozíky s hmotností m_1 a m_2 jsou spojeny pružinou, která má koeficient pružnosti κ.



Podle obrázku působí na první vozík hnací síla $f(t)$.

Polohy vozíků jsou $y_1(t)$ a $y_2(t)$, takže při zanedbání tření mají pohybové rovnice tvar

$$\begin{aligned} m_1 \, y_1''(t) &= f(t) + \kappa \, (y_2(t) - y_1(t)) \\ m_2 \, y_2''(t) &= -\kappa \, (y_2(t) - y_1(t)) \end{aligned}$$

Máme sestavit stavové rovnice pro systém dvou vozíků.

Položíme

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y_1(t), & x_2(t) &= y_2(t), \\ x_3(t) &= y_1'(t), & x_4(t) &= y_2'(t) \end{aligned}$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1'(t) \equiv y_1'(t) &= x_3(t)\,, \\ x_2'(t) \equiv y_2'(t) &= x_4(t)\,, \\ x_3'(t) \equiv y_1''(t) &= \frac{\kappa}{m_1}\left(x_2(t) - x_1(t)\right) + \frac{1}{m_1} f(t) \\ x_4'(t) \equiv y_2''(t) &= -\frac{\kappa}{m_2}\left(x_2(t) - x_1(t)\right) \end{aligned}$$

kterou již snadno převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} f(t)$$

a

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\kappa}{m_1} & \frac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{m_2} & -\frac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 Matematické nářadí

Použití

Analýza či návrh systému v **časové oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí času) jsou velmi pracné.

Převod do **frekvenční oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí komplexní proměnné nazývané *úhlová frekvence*) nám

- poskytuje *fundamentálně odlišný nástroj* k pochopení funkce systému,
- často *drasticky sníží složitost* matematických výpočtů potřebných pro analýzu systému.

2.1 Laplaceova transformace

2.2 Definice

Definice

Laplaceova transformace funkce $f(t)$, která je nanejvýš polynomiálního růstu, je definována integrálem

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt$$

Tento vztah často zapisujeme $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp.$$

2.3 Vlastnosti

Vlastnosti: Linearita

Laplaceova transformace je lineární

$$\mathcal{L}\left\{\sum_k a_k f_k(t)\right\} = \sum_k a_k \mathcal{L}\{f_k(t)\}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_m b_m F_m(p)\right\} = \sum_m b_m \mathcal{L}^{-1}\{F_m(p)\}$$

Vlastnosti: Změna měřítka

Věta o změně měřítka

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} \qquad F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right) = \mathcal{L}^{-1}\{F(b\,p)\} \qquad \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right) = \mathcal{L}\{f(a\,t)\}$$

Vlastnosti: Posunutí

Věta o posunutí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\mathbb{1}(t-\tau)\, f(t-\tau)\right\} &= && e^{-p\tau}\mathcal{L}\left\{f(t)\right\} \\ \mathcal{L}\left\{\mathbb{1}(t-\tau)\right\} &= && e^{-p\tau}\mathcal{L}\left\{\mathbb{1}(t)\right\} \end{aligned}$$

Vlastnosti: Konvoluce

Věta o konvoluci

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(p)\, G(p)$$

Vlastnosti: Obraz derivace

Věta o obrazu derivace funkce $f(t)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{f(t)\right\} &= F(p) \\ \mathcal{L}\left\{f'(t)\right\} &= pF(p) - f(0) \\ \mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} &= p^2F(p) - pf(0) - f'(0) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\left\{f^{(n)}(t)\right\} &= p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

Vlastnosti: Obraz integrálu

Věta o obrazu integrálu funkce $f(t)$

$$\mathcal{L}\left\{\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{p}F(p)$$

Uvědomte si, že

$$\int\limits_0^t f(\tau)d\tau = \int\limits_0^t \mathbb{1}(t-\tau)\, f(\tau)d\tau$$

2.4 Tabulka obrazů

Tabulka Laplaceovy transformace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\dfrac{1}{p}$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

Tabulka Laplaceovy transformace

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$	$F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
$t \cos \omega t$	$\dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$

2.5 Inverzní Laplaceova transformace

K čemu to je

Jsme na půli cesty:

- Umíme převést diferenciální rovnici na lineární.
- Umíme si tedy spočíst $Y(p)$ – Laplaceův obraz hledané funkce $y(t)$ – jako podíl dvou polynomů.
- Ale co teď?

Potřebujeme jednoduchý nástroj, s jehož pomocí zvládneme *inverzní Laplaceovu transformaci* $Y(p) \to y(t)$.

Odvážní ji mohou počítat pomocí definičního integrálu. Jde to jednodušeji?

2.6 Nuly a póly

Nuly a póly

Mějme racionální lomenou funkci

$$Y(p) = \frac{Q(p)}{N(p)}.$$

O této funkci říkáme, že má *nulové body* (nuly)

$$p_{0\nu} \Leftrightarrow Q(p_{0\nu}) = 0$$

a že má *póly*

$$p_{\infty\mu} \Leftrightarrow N(p_{\infty\mu}) = 0.$$

Znalost polohy pólů je důležitá (nejenom) pro zpětnou Laplaceovu transformaci.

Jednoduché a násobné póly

Pokud má racionální lomená funkce jednoduché póly, potom

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^{n} (p - p_{\infty\mu}) = (p - p_{\infty1})\,(p - p_{\infty2}) \dots (p - p_{\infty n})$$

Situace pro násobné póly, kde

$$N(p) = (p - p_{\infty1})^{\beta_1}\,(p - p_{\infty2})^{\beta_2} \dots (p - p_{\infty n})^{\beta_n}$$

je složitější, ale stále řešitelná, jak si ukážeme později.

2.7 Rozklad na parciální zlomky

Rozklad na parciální zlomky

Každou racionální lomenou funkci lze rozložit na součet *parciálních zlomků* ve tvaru

$$\begin{aligned} Y(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} &= \sum_{\mu=1}^{n} \frac{k_\mu}{p - p_{\infty\mu}} \\ &= \frac{k_1}{p - p_{\infty1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty2}} + \dots + \frac{k_n}{p - p_{\infty n}}, \end{aligned}$$

kde k_μ se nazývají *rezidua*.

Rezidua určíme například

- pomocí limit v pólech
- porovnáním koeficientů polynomů

Rezidua pomocí limit

Pro rezidua platí

$$\begin{aligned} k_\mu &= \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \\ &= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \to p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{1}{N(p)} \\ &= Q(p_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty\mu})} \end{aligned}$$

kde

$$N'(p_{\infty\mu}) = \prod_{i=1, i\neq\mu}^{n} (p - p_{\infty i}).$$

Heavisideův vzorec

Protože

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p-\alpha}\right\} = e^{\alpha t},$$

dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{\mu=1}^{n}\frac{k_\mu}{p-p_{\infty\mu}}\right\} = \sum_{\mu=1}^{n} k_\mu e^{p_{\infty\mu}t}.$$

Tím jsme dokázali *Heavisideův vzorec* pro zpětnou transformaci racionální lomené funkce s jednoduchými póly.

Heavisideův vzorec

$$\mathcal{L}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\} = \sum_{\mu=1}^{n}\frac{Q(p_{\infty\mu})}{N'(p_{\infty\mu})}e^{p_{\infty\mu}t}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{Q(p)}{pN(p)}\right\} = \frac{Q(0)}{N(0)} + \sum_{\mu=1}^{n}\frac{Q(p_{\infty\mu})}{p_{\infty\mu}N'(p_{\infty\mu})}e^{p_{\infty\mu}t}$$

Vícenásobné póly

Jestliže

$$N(p) = (p-p_1)^{\beta_1}(p-p_2)^{\beta_2}\dots(p-p_n)^{\beta_n}$$

má násobné kořeny, inverzní Laplaceova transformace má tvar

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\} &= e^{p_1 t}\left[k_1^{(1)} + k_1^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots k_1^{(\beta_1)}\frac{t^{\beta_1-1}}{(\beta_1-1)!}\right] \\
&+ e^{p_2 t}\left[k_2^{(1)} + k_2^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots k_2^{(\beta_2)}\frac{t^{\beta_2-1}}{(\beta_2-1)!}\right] \\
&\vdots \\
&+ e^{p_n t}\left[k_n^{(1)} + k_n^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots k_n^{(\beta_n)}\frac{t^{\beta_n-1}}{(\beta_n-1)!}\right]
\end{aligned}$$

3 Příklady

3.1 Diferenciální rovnice 2. řádu

Laplaceova transformace

LTI systém je popsán diferenciální rovnicí 2. řádu

$$y''(t) + 2ay'(t) + (a^2 + b^2)y(t) = x(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad y'(0) = c_2,$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace. Platí

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{y'(t)\right\} &= pY(p) - y(0),\\ \mathcal{L}\left\{y''(t)\right\} &= p^2Y(p) - py(0) - y'(0).\end{aligned}$$

Algebraický tvar

Nalezneme Laplaceovou transformací diferenciální rovnice její algebraický tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2 + b^2)Y(p) = X(p)\,.$$

Vyřešíme rovnici vzhledem k obrazu výstupní veličiny $Y(p)$ a dostáváme

$$\left(p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)\right)Y(p) = X(p) + py(0) + \dot{y}(0) + 2ay(0)$$

nebo

$$Y(p) = \frac{X(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}\,.$$

Jak převedeme zpět do časové oblasti?

3.2 Inverzní Laplaceova transformace

Rozklad na parciální zlomky

Nechť

$$Y(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \frac{p + 3}{(p - 2)^2(p + 5)(p + 7)}.$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{Q(p)}{N(p)} = \frac{k_1^{(2)}}{(p - 2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p - 2} + \frac{k_2}{p + 5} + \frac{k_3}{p + 7} \tag{5}$$

Rozklad na parciální zlomky

Rovnici vynásobíme členem s nejvyšší mocninou, $(p - 2)^2$:

$$\begin{aligned}&\frac{(p + 3)(p - 2)^2}{(p - 2)^2(p + 5)(p + 7)} =\\ &\qquad = k_1^{(2)} + k_1^{(1)}(p - 2) + \frac{k_2(p - 2)^2}{p + 5} + \frac{k_3(p - 2)^2}{p + 7}\end{aligned} \tag{6}$$

a nalezneme limitu pro $p \to 2$

$$\frac{2+3}{(2+5)(2+7)} = \frac{5}{63} = k_1^{(2)} \tag{7}$$

Rozklad na parciální zlomky

Po dosazení za $k_1^{(2)}$ obdržíme

$$\frac{p+3}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} = \frac{\frac{5}{63}}{(p-2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}.$$

Výraz $\dfrac{5}{63(p-2)^2}$ odečteme od obou stran:

$$\frac{p+3}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} - \frac{\frac{5}{63}}{(p-2)^2} = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}.$$

Rozklad na parciální zlomky

Upravíme na

$$\frac{-5p^2+3p+14}{63(p-2)^2(p+5)(p+7)} = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}.$$

Čitatel levé strany *musí být dělitelný* $(p-2)$ *beze zbytku*. Výsledná rovnice je po úpravě

$$\frac{-5p+2}{63(p-2)(p+5)(p+7)} = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}.$$

Rozklad na parciální zlomky

Pro tuto rovnici se výpočet k_μ redukuje na případ s jednoduchými póly a platí

$$\begin{aligned}
k_1^{(1)} &= \lim_{p\to 2} \frac{-5p+2}{63(p+5)(p+7)} = -\frac{8}{3969} \\
k_2 &= \lim_{p\to -5} \frac{-5p+2}{63(p-2)(p+7)} = -\frac{3}{98} \\
k_3 &= \lim_{p\to -7} \frac{-5p+2}{63(p-2)(p+5)} = \frac{37}{1134}
\end{aligned}$$

Inverzní transformace

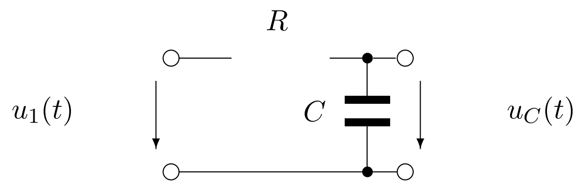
Zpětnou transformaci provedeme Heavisideovým vzorcem a dostaneme

$$y(t) = \frac{5}{63}te^{2t} - \frac{8}{3969}e^{2t} - \frac{3}{98}e^{-5t} + \frac{37}{1134}e^{-7t}.$$

3.3 RC člen

RC člen

Výstupní napětí $u_C(t)$ integračního RC článku



lze popsat diferenciální rovnicí prvního řádu pro $y(t) = u_C(t)$

$$RC\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t) + y(t) = u_1(t), \tag{8}$$

kde $u_1(t) = U_0 \cdot \mathbb{1}(t)$ je připojené stejnosměrné napětí U_0. Počáteční hodnota výstupního napětí je $y(0) = U_\mathrm{A}$.

Postup řešení diferenciální rovnice

1. provedeme Laplaceovu transformaci původní diferenciální rovnice pro $y(t)$ a získáme tak algebraickou rovnici pro neznámou veličinu $Y(p)$
2. s použitím počátečních podmínek nalezneme řešení algebraické rovnice ve tvaru racionální lomené funkce $Y(p) = \dfrac{Q(p)}{N(p)}$,
3. nalezneme rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky
4. provedeme zpětnou Laplaceovu transformaci a získáme tak řešení původní diferenciální rovnice pro $y(t) \mid t \geq 0$

Transformace na algebraickou rovnici

Vstupní namětí je stejnosměrné (konstantní), pro $t \leq 0$ je transformace $\mathcal{L}\{U_0\} = \mathcal{L}\{U_0 \cdot \mathbb{1}(t)\}$.

Transformace původní diferenciální rovnice na algebraickou, $y(t) \to Y(p)$ je pak

$$RC\,[\,pY(p) - y(0)\,] + Y(p) = U_0 \cdot \frac{1}{p}$$

Nalezení řešení

S použitím počátečních podmínek (v tomto případě $y(0) = U_\mathrm{A}$) nalezneme řešení algebraické rovnice ve tvaru racionální lomené funkce.

$$Y(p) = \frac{U_0 + pU_\mathrm{A}RC}{p(1 + pRC)} \tag{9}$$

Rozklad na parciální zlomky

Nalezneme rozklad racionální lomené funkce (9) na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{U_0 + pU_\mathrm{A}RC}{p(1 + pRC)} = \frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{1 + pRC}, \tag{10}$$

a určíme k_1 a k_2

$$k_1 = \lim_{p \to 0} \frac{U_0 + pU_\mathrm{A}RC}{(1 + pRC)} = U_0,$$
$$k_2 = \lim_{p \to -1/RC} (1 + pRC) \frac{U_0 + pU_\mathrm{A}RC}{p} = -RC(U_0 - U_\mathrm{A}).$$

Získáme tak tvar $Y(p)$ vhodný pro zpětnou transformaci:

$$Y(p) = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0 - U_\mathrm{A}}{p + 1/RC}. \tag{11}$$

Zpětná transformace

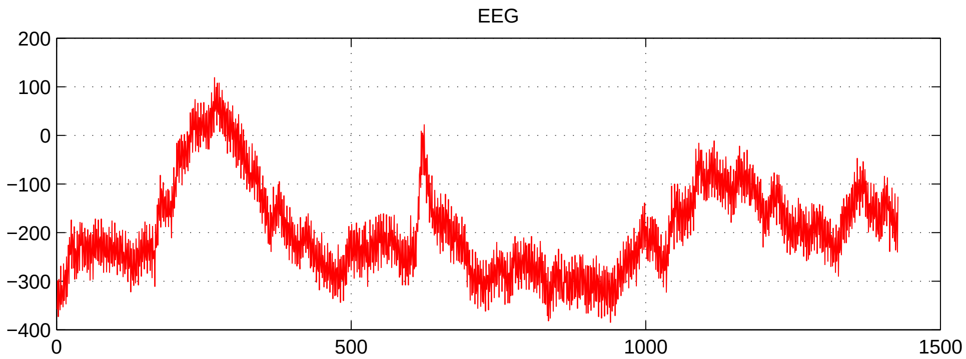
Zpětnou transformaci získáme řešení původní diferenciální rovnice pro $t \geq 0$ ve tvaru

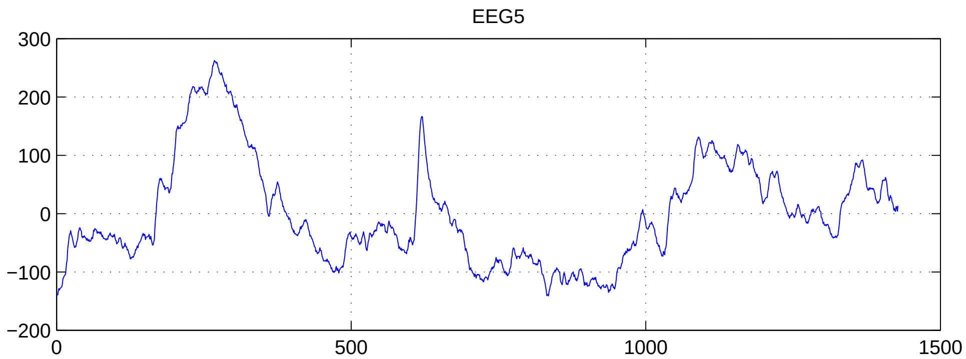
$$y(t) = U_0 - (U_0 - U_\mathrm{A})e^{-\frac{t}{RC}}. \tag{12}$$

4 Domácí úkol

4.1 Problém 1

Problém 1





Problém 1

Na obrázku je uveden příklad použití klouzavého průměru. Klouzavý průměr je nejpoužívanější metoda analýzy dat. Vyhlazuje prudké výkyvy. Jednoduchý klouzavý průměr $y(n)$ z naměřených dat $x(n)$ v pěti následujících obdobích má tvar

$$y(n) = \frac{1}{5}\left(x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)\right).$$

Vaším úkolem je:

- Napočítat klouzavý průměr $y(n)$ délky 5 pro prvních **deset členů** jednotkového skoku $x(n) \equiv \mathbf{1}(n)$.
- Nakreslit průběh jednotkového skoku a odpovídajícího klouzavého průměru.
- Určit, jaký tvar bude mít vzorec pro klouzavý průměr délky ℓ.

4.2 Problém 2

Problém 2

Dynamický systém je popsán diferenciální rovnicí tvaru

$$y''(t) + \alpha_0^2(1 + \sin\omega_0 t)\, y(t) = \cos\Omega t.$$

Určete, zda uvedený systém je

- spojitý/nespojitý
- autonomní/neautonomní
- lineární/nelineární
- časově invariantní/ časově proměnný