Modelování systémů a procesů (611MSP)

Děčín – přednáška 3

Vlček, Kovář, Přikryl

19. března 2012

Obsah

1 Diferenciální rovnice 2.řádu

1.1 Laplaceova transformace

Diferenciální rovnice

Rovnici

$$\ddot{y}(t) + 2a\dot{y}(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(0) = c_2$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}y(t)\right\} = p\,Y(p) - y(0)$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right\} = p^2\,Y(p) - py(0) - \dot{y}(0)$$

Algebraický tvar

$$p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2+b^2)Y(p) = U(p)$$

Rovnici vyřešíme vzhledem k obrazu výstupní veličiny $Y(p)$

$$\left(p^2 + 2ap + (a^2+b^2)\right) Y(p) = U(p) + py(0) + \dot{y}(0) + 2ay(0)$$

$$Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p+2a)c_1}{p^2 + 2ap + (a^2+b^2)} = \frac{U(p) + c_2 + (p+2a)c_1}{(p+a+ib)(p+a-ib)}$$

1.2 Přenosová funkce

Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

pro *nulové počáteční podmínky* $\Rightarrow c_1 = 0$ a $c_2 = 0$.

$$Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p+2\,a)\,c_1}{(p+a+i\,b)(p+a-i\,b)}$$

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+a+i\,b)(p+a-i\,b)} = \frac{1}{p^2 + 2a\,p + (a^2+b^2)}$$

1.3 Impulsní odezva

Impulsní odezvu určíme jako inverzní Laplaceovu transformaci přenosové funkce

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{p^2 + 2a\,p + (a^2+b^2)}$$

Jmenovatele rozložíme na čtverec

$$H(p) = \frac{1}{(p+a)^2 + b^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{H(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p+a)^2+b^2}\right\} = \frac{1}{b}\,e^{-at}\sin bt$$

1.4 Přechodová odezva

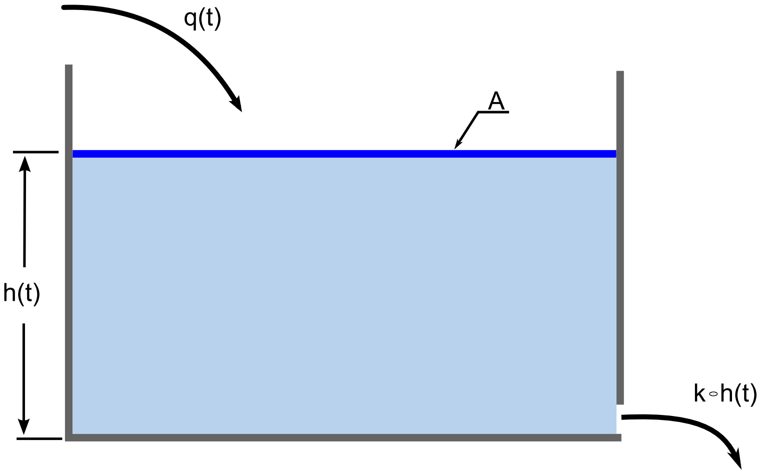
Odezva na $u(t) = \mathbb{1}(t)$

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme inverzní Laplaceovou transformací

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{S(p)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p}\,H(p)\right\}$$

a platí

$$\begin{aligned} s(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p((p+a)^2+b^2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{A}{p} + \frac{Bp+C}{(p+a)^2+b^2}\right\} \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - e^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right]. \end{aligned}$$



Obrázek 1: Vypouštění nádrže

2 Příklady spojitých systémů

2.1 Nádrž s exponenciálně tlumeným přítokem

Matematický popis

Systém popisuje diferenciální rovnice prvního řádu

$$A \cdot h'(t) + k \cdot h(t) = q(t) = w \cdot e^{-t}$$

Počáteční podmínky a nastavení konstant zvolíme

$$\begin{aligned} h(0) &= 4 \\ k &= 0{,}5 \text{ m}^2\text{s}^{-1} \\ w &= 4 \text{ m}^3\text{s}^{-1} \\ A &= 0{,}25 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Matematické řešení

1. Laplaceova transformace

$$A(pH(p) - h(0)) + k \cdot H(p) = Q(p) = \frac{w}{p+1}$$

2. Vyjádření $H(p)$

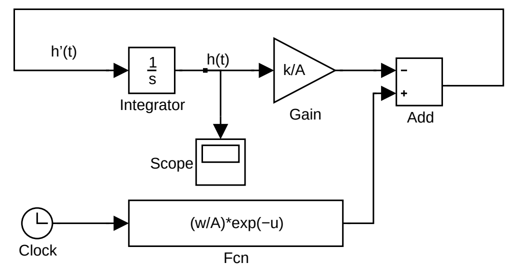
$$H(p) = \frac{4(p+5)}{(p+1)(p+2)}$$

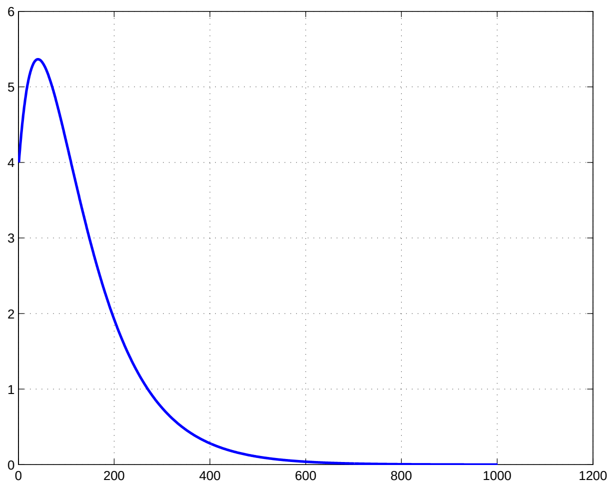
3. Rozklad na parciální zlomky

$$H(p) = \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2} = \frac{16}{p+1} - \frac{12}{p+2}$$

4. Zpětná Laplaceova transformace

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(H(p)\} = 16e^{-t} - 12e^{-2t}$$





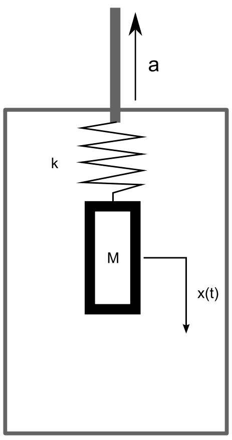
Simulink Model

Výsledek

2.2 Závaží ve výtahu

Závaží ve výtahu

Matematický popis



Diferenciální rovnice, která popisuje systém:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -k \cdot x(t) + m \cdot a \cdot \mathbf{1}(t)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = a \cdot \mathbf{1}(t)$$

Počáteční podmínky a nastavení konstant:

$$\dot{x}(0) = x(0) = 0$$

Matematické řešení 1

Laplaceova transformace

$$p^2 X(p) + \omega^2 X(p) = \frac{a}{p}$$

$$X(p) = \frac{1}{p^2 + \omega^2} \cdot \frac{a}{p} = F_1(p) F_2(p)$$

$$f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_1(p)\} = \frac{\sin(\omega t)}{\omega}$$

$$f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F_2(p)\} = a \cdot \mathbf{1}(t)$$

$$!!! x(t) \neq f_1(t) \cdot f_2(t) !!!$$

Matematické řešení 1

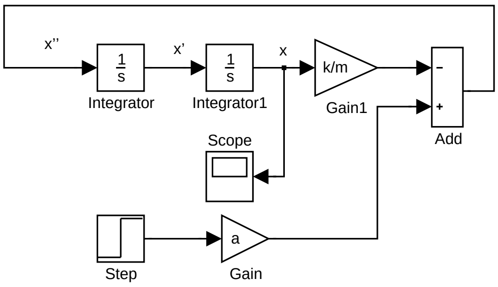
Konvoluční teorém

$$x(t) = (f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(u) f_2(t-u) du$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{\sin(\omega u)}{\omega} \cdot a \cdot \mathbf{1}(t-u) du$$

$$x(t) = \frac{a}{\omega} \int_0^t \sin(\omega u) du = \frac{a}{\omega} \left[\frac{-\cos(\omega u)}{\omega} \right]_0^t$$

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t)).$$



Matematické řešení 2

$$p^2X(p) + \omega^2 X(p) = \frac{a}{p}$$

$$X(p) = \frac{a}{p(p^2 + \omega^2)}$$

Rozklad na parciální zlomky

$$X(p) = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + \omega^2}$$

$$Ap^2 + A\omega^2 + Bp^2 + Cp = a$$

$$(A + B)p^2 + Cp + A\omega^2 = a$$

$$A = \frac{a}{\omega^2}, B = -\frac{a}{\omega^2}, C = 0$$

Matematické řešení 2

Inversní Laplaceova transformace

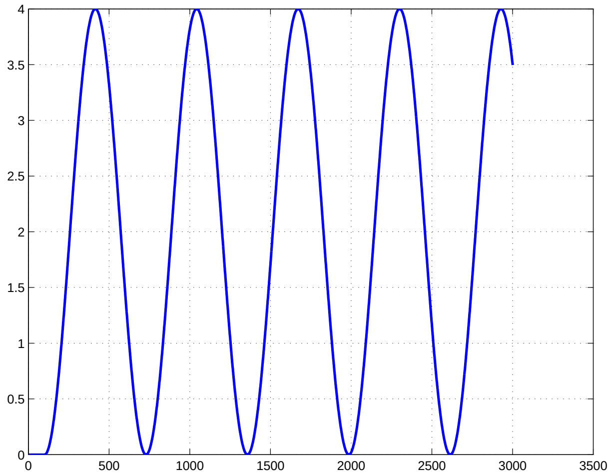
$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\frac{a}{\omega^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \omega^2}\right]\}$$

$$x(t) = \frac{a}{\omega^2}\left[\mathbf{1}(t) - \cos(\omega t)\right]$$

Simulink Model

$$k = m = a = 2$$

Výsledek



3 Stavový popis

Stavový popis

Metoda stavového popisu transformuje diferenciální rovnici N-tého řádu na soustavu N diferenciálních rovnic *prvního* řádu.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + du(t). \end{aligned} \tag{1}$$

První rovnice se nazývá *stavová* a druhá *výstupní* rovnice systému. [1cm] Řešení stavových rovnic spojitého LTI systému při buzení vstupem $u(t) \leftrightarrow U(p)$ a s vektorem počátečních podmínek $\mathbf{x}(0)$ lze provést pomocí Laplaceovy transformace.

3.1 Přenosová funkce

Laplaceova transformace

$$\begin{aligned} p \cdot \mathbf{X}(p) - \mathbf{x}(0) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(p) + \mathbf{B}\,U(p) \\ Y(p) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(p) + d\,U(p). \end{aligned} \tag{2}$$

Při úpravě první rovnice obdržíme tvar $(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\,\mathbf{X}(p)$, kde bylo nutné zavést jednotkovou matici $\mathbf{I}$, aby maticová rovnice měla smysl. Potom platí

$$(p\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(p) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{B}U(p)$$

a obraz výstupu lze vyjádřit ve tvaru

$$Y(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}(0) + \left[\mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + d\right]U(p). \tag{3}$$

$Y(p) =$ přechodová složka + ustálená složka

Přenosová funkce

Při nulových počátečních podmínkách $\mathbf{x}(0)$ lze přenosovou funkci odvodit pro ustálenou složku ve tvaru

$$H(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + d. \tag{4}$$

4 Stabilita spojitých systémů

Příklad na rovnici 2. řádu

Diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

$$y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) = u(t)$$

má za *nulových počátečních podmínek* přenosovou funkci

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + a\,p + b} = \frac{1}{(p + k_1)(p + k_2)}.$$

Poloha pólů přenosové funkce $H(p)$ rozhoduje o stabilitě systému.

4.1 Kritérium stability

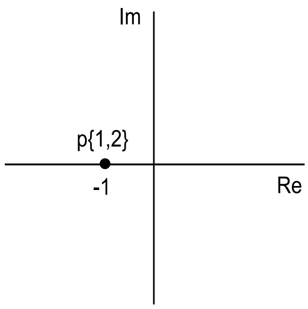
Kritérium stability

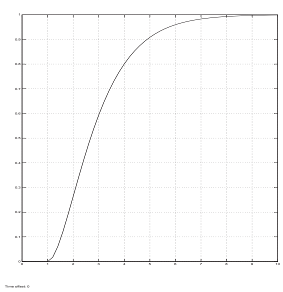
1. vnější popis
   - **Stabilní systém** Reálná část všech pólů přenosové funkce $H(p)$ leží v levé části p-roviny.
   - **Nestabilní systém** Reálná část alespoň jednoho pólu přenosové funkce $H(p)$ leží v pravé části p-roviny.
   - **Mez stability** Reálná část pólů přenosové funkce $H(p)$ je rovna nule.
2. vnitřní popis Pro stabilitu systému je rozhodující matice A, respektive determinant výrazu $p\,\mathbf{I} - \mathbf{A}$, tedy

$$\det(p\,\mathbf{I} - \mathbf{A})$$

Stabilní systém

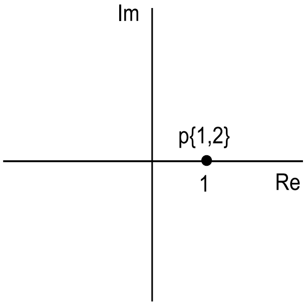
$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 2\;p + 1} = \frac{1}{(p + 1)(p + 1)}$$

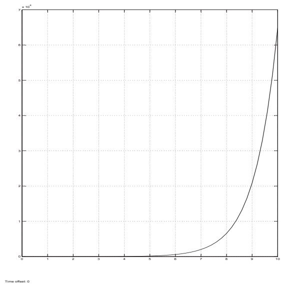




Nestabilní systém

$$H(p) = \frac{1}{p^2 - 2\;p + 1} = \frac{1}{(p - 1)(p - 1)}$$





Mez stability

$$H(p) = \frac{1}{p^2 + 0\ p + 1} = \frac{1}{p^2 + 1}$$