# Modelování systémů a procesů (611MSP)

Děčín – přednáška 4

Vlček, Kovář, Pěnička, Přikryl

4. přednáška 611MSP
čtvrtek 12. dubna 2012

## Obsah



# 1 Matematické nářadí

## 1.1 Motivace

### Motivace

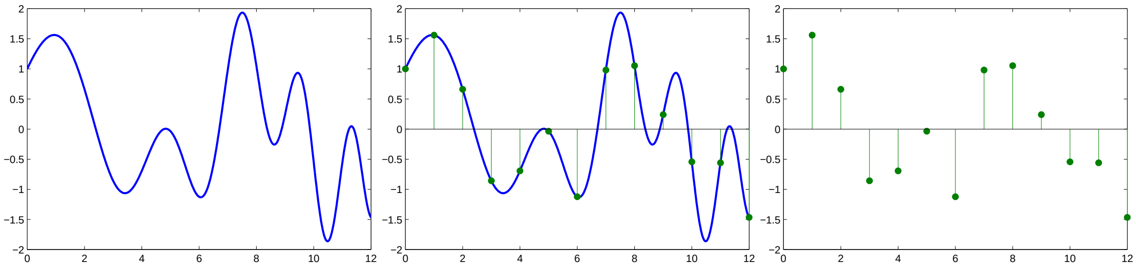
Chceme analyzovat chování nějakého systému, případně navrhnout systém, který má přesně specifikované parametry.

Opíráme se o

- **fyzikální model**, založený na fyzikálních zákonech
- **black-box model**, založený na pozorování, identifikaci

Analýza chování reálného systému je složitý proces (model představuje jedna či více diferenciálních či diferenčních rovnic vyššího řádu) $\Rightarrow$ numerické řešení.

Jak analýzu *zjednodušit*?




Obrázek 1: Vzorkování spojité funkce s periodou $T = 1$s

### 1.2 Použití

**Použití**

Analýza či návrh systému v **časové oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí času) jsou velmi pracné.

Převod do **frekvenční oblasti** (vstupy a výstupy jsou funkcí komplexní proměnné nazývané *úhlová frekvence*) nám

- poskytuje *fundamentálně odlišný nástroj* k pochopení funkce systému,
- často *drasticky sníží složitost* matematických výpočtů potřebných pro analýzu systému.

## 2 $\mathcal{Z}$-transformace

### 2.1 O původu diskrétní transformace

**Jak se ze spojitého systému stane systém diskrétní**

Diskrétní systém vznikne ze spojitého systému *vzorkováním* s periodou vzorkování $T$. Příklad je uveden na Obrázku 4.

**Vzorkování signálu**

Vztah mezi spojitou funkcí $f(t)$ a ideálně vzorkovanou funkcí $f^*(t)$ lze formálně zapsat jako

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - nT),$$

kde $T$ je vzorkovací perioda signálu.

Ze spojité funkce $f(t)$ se tak stane **posloupnost** diskrétních hodnot.

U této posloupnosti je zvykem neuvádět vzorkovací periodu signálu. Značíme ji $f(n)$.

**Vzorkování signálu**

Jestliže budeme hledat Laplaceovu transformaci funkce $f^*(t)$, dostaneme

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left\{f^*(t)\right\} &= \int_0^\infty f^*(t)\, e^{-pt} dt \\
&= \int_0^\infty \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\, \delta(t-nT)\, e^{-pt} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty \delta(t-nT)\, f(t)\, e^{-pt} dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-pnT} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n},
\end{aligned}$$

kde jsme zavedli komplexní proměnnou $z = e^{pT}$ a $f(n)$ označuje $n$-tý vzorek příslušné spojité funkce.

## 2.2 Definice

### Definice

Jednostranná $\mathcal{Z}$-transformace posloupnosti $f(n)$ je definována nekonečnou řadou

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n},$$

kterou často označujeme $F(z) = \mathcal{Z}\left\{f(n)\right\}$.

Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky $\mathcal{C}$, jež obsahuje všechny singulární body funkce $F(z)$. Pro všechna $n = 0, 1, \ldots, \infty$ platí

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\mathcal{C}} F(z) z^{n-1} \mathrm{d}z \equiv \mathcal{Z}^{-1}\left\{F(z)\right\} .$$

## 2.3 Vlastnosti

### Linearita

$\mathcal{Z}$-transformace je lineární:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\left\{\sum_k a_k f_k(n)\right\} &= \sum_k a_k \mathcal{Z}\left\{f_k(n)\right\} \\
\mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_m b_m F_m(z)\right\} &= \sum_m b_m \mathcal{Z}^{-1}\left\{F_m(z)\right\}
\end{aligned}$$

### Změna měřítka

Pro $\mathcal{Z}$-transformaci platí věta o změně měřítka vzoru a obrazu:

$$\begin{aligned}
a^{-n} f(n) &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{F(az)\right\} \\
F(a^{-1}z) &= \mathcal{Z}\left\{a^n f(n)\right\}
\end{aligned}$$

### Posunutí

Věty o posunutí jsou velmi důležité pro transformaci diferenčních rovnic na algebraické rovnice v $\mathcal{Z}$-rovině, podobně, jako je tomu u spojitých systémů s větami o obrazu derivací v Laplaceově transformaci.

$$\mathcal{Z}\left\{f(n-m)\right\} = z^{-m}\mathcal{Z}\left\{f(n)\right\} = z^{-m}F(z)\ |_{\forall n-m<0:\, f(n-m)=0}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{f(n+m)\right\} &= z^{m}\left[\mathcal{Z}\left\{f(n)\right\} - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu)z^{-\nu}\right] \\ &= z^{m}\left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu)z^{-\nu}\right]\end{aligned}$$

### Transformace částečné sumy

Částečnou sumu posloupnosti $f(n)$ lze transformovat jako

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{\nu=0}^{n} f(\nu)\right\} = \frac{z}{z-1}F(z)$$

$$\mathcal{Z}\left\{\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\nu)\right\} = \frac{1}{z-1}F(z)$$

### Transformace diferencí

Pro $m = 1, 2, \ldots, \infty$ a diference $m$-tého řádu

$$\begin{aligned}\Delta^0 f(n) &= f(n), \\ \Delta^1 f(n) &= f(n+1) - f(n), \\ \Delta^m f(n) &= \Delta\left[\Delta^{m-1} f(n)\right]\end{aligned}$$

platí tato věta o transformaci diferencí:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left\{\Delta^1 f(n)\right\} &= (z-1)F(z) - f(0)z \\ \mathcal{Z}\left\{\Delta^2 f(n)\right\} &= (z-1)^2F(z) - f(0)z(z-1) + \Delta^1 f(0)z\end{aligned}$$

### Obraz konvoluce

Podobně, jako ve spojitém případě, i pro $\mathcal{Z}$-transformaci platí tato věta o transformaci konvoluční sumy:

$$\mathcal{Z}\left\{f(n) * g(n)\right\} = \mathcal{Z}\left\{\sum_{m=0}^{\infty} f(n-m)g(m)\right\} = F(z)\cdot G(z)$$

### Derivace obrazu

Jednoduchá derivace obrazu $F(z)$ se na vzoru $f(n)$ projeví jako násobení proměnnou $n$:

$$\mathcal{Z}\left\{nf(n)\right\} = z\frac{\mathrm{d}F(z)}{\mathrm{d}z}$$

### 2.4 Tabulka obrazů

Toto je pouze základní tabulka obrazů $\mathcal{Z}$-transformace, detailnější tabulka je vystavena na webových stránkách předmětu.

| $f(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{F(z)\right\}$ | $F(z) = \mathcal{Z}\left\{f(n)\right\}$ |
|---|---|
| $\delta(n)$ | $1$ |
| $1(n)$ | $\frac{1}{1-z^{-1}}$ |
| $a^n$ | $\frac{1}{1-a\cdot z^{-1}}$ |
| $n$ | $\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$ |
| $n\cdot a^{n-1}$ | $\frac{z^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$ |

## 3 Inverzní $\mathcal{Z}$-transformace

#### Definice

Zpětná $\mathcal{Z}$-transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky $\mathcal{C}$, která obsahuje všechny singulární body funkce $Y(z)$. Pro všechna $n = 0, 1, \ldots, \infty$ platí

$$y(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathcal{C}} Y(z)z^{n-1}\mathrm{d}z \equiv \mathcal{Z}^{-1}\left\{Y(z)\right\}.$$

#### Výpočet

Poté, co jsme vyřešili algebraickou rovnici a získali transformovaný obraz řešení $Y(z)$, je třeba tento obraz převést zpět do roviny diskrétního času na hledanou funkci $y(n)$.

V zásadě lze použít dva postupy:

- zpětná transformace *pomocí definičního integrálu*,
- rozklad řešení na součet parciálních zlomků a *použití tabulek* pro zpětnou transformaci primitivních funkcí.

Pro praktické nasazení je samozřejmě výrazně vhodnější druhá varianta.

## 3.1 Parciální zlomky

**Metoda výpočtu pomocí parciálních zlomků**

Předpokládejme, že $Y(z) = \dfrac{Q(z)}{N(z)}$ je *racionální lomenou funkcí.*

O racionální lomené funkci $\dfrac{Q(z)}{N(z)}$ říkáme, že má *nulové* body $z_{0\nu}$, jestliže $Q(z_{0\nu}) = 0$ a že má *póly* $z_{\infty\mu}$, jestliže $N(z_{\infty\mu}) = 0$.

Pokud má funkce $\dfrac{Q(z)}{N(z)}$ jednoduché póly, potom

$$N(z) = \prod_{\mu=1}^{N}(1 - z_{\infty\mu}z^{-1}) = (1 - z_{\infty1}z^{-1})(1 - z_{\infty2}z^{-1})\dots(1 - z_{\infty N}z^{-1})$$

**Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky**

$$\begin{aligned}\frac{Q(z)}{N(z)} &= \sum_{\mu=1}^{N}\frac{k_\mu}{1 - z_{\infty\mu}z^{-1}}\\ &= \frac{k_1}{1 - z_{\infty1}z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_{\infty2}z^{-1}} + \dots + \frac{k_N}{1 - z_{\infty N}z^{-1}},\end{aligned}$$

kde

$$k_\mu = \lim_{z\to z_{\infty\mu}}(1 - z_{\infty\mu}z^{-1})\frac{Q(z)}{N(z)}$$

**Koeficienty $k_\mu$**

$$\begin{aligned}k_\mu &= \lim_{z\to z_{\infty\mu}}(1 - z_{\infty\mu}z^{-1})\frac{Q(z)}{N(z)}\\ &= Q(z_{\infty\mu})\lim_{z\to z_{\infty\mu}}(1 - z_{\infty\mu}z^{-1})\frac{1}{N(z)}\\ &= Q(z_{\infty\mu})\lim_{z\to z_{\infty\mu}}\frac{1}{\dfrac{N(z)}{1 - z_{\infty\mu}z^{-1}}}\\ &= Q(z_{\infty\mu})\frac{1}{N'(z_{\infty\mu})}\end{aligned}$$

**Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky**

Pro jednoduchost budeme dále psát $z_{\infty\mu} \to z_\mu$. Pro $|az^{-1}| < 1$ platí

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{1 - az^{-1}}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}a^n z^{-n}\right\} = a^n$$

dostaneme

$$\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{Q(p)}{N(p)}\right\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\sum_{\mu=1}^{N}\frac{k_\mu}{1 - z_\mu z^{-1}}\right\} = \sum_{\mu=1}^{N}k_\mu z_\mu^n.$$

Tím jsme (již podruhé) dokázali *vzorec pro zpětnou transformaci racionální lomené funkce s jednoduchými póly.*

# 4 Příklady úloh řešených $\mathcal{Z}$-transformací

## 4.1 Nabídka – poptávka

### Popis problému

Mikroekonomický model variace ceny vlivem nabídky a poptávky popisuje pomocí dvou diferenčních rovnic vývoj ceny zboží jako funkce nabídky tohoto zboží na trhu (1. rovnice) a poptávky po tomto zboží (2. rovnice).

*Rovnice nabídky* říká, že nabídka *dnes* závisí na *včerejší* ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n(k) = \mathcal{C}c(k-1) + \mathcal{A}x(k). \tag{1}$$

*Rovnice poptávky* říká, že poptávka *dnes* závisí na *dnešní* ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$p(k) = -\mathcal{D}c(k) + \mathcal{B}x(k). \tag{2}$$

### Diferenční rovnice

Rovnost nabídky a poptávky

$$n(k) = p(k) \tag{3}$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c(k) + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}c(k-1) = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}}x(k). \tag{4}$$

### Transformace proměnných

Pro jednoduchost označíme

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} \equiv \gamma\ , \qquad \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}} \equiv \alpha.$$

Diferenční rovnice má v označení $c(k) \equiv y(k)$ tvar

$$y(k) + \gamma y(k-1) = \alpha x(k)$$

### $\mathcal{Z}$-transformace diferenční rovnice

Za předpokladu $x(k) \equiv 1(k)$ dostaneme z rovnice

$$y(k) + \gamma y(k-1) = \alpha x(k)$$

s použitím $\mathcal{Z}$-transformace algebraickou rovnici

$$Y(z) + \gamma z^{-1}Y(z) = \frac{\alpha}{1-z^{-1}}$$

s řešením v rovině $\mathcal{Z}$ ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})}.$$

**Rozklad na parciální zlomky**

Rozkladem na parciální zlomky

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})} = \frac{k_1}{1 - z^{-1}} + \frac{k_2}{1 + \gamma z^{-1}},$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) Y(z) = \frac{\alpha}{1 + \gamma}, \\ k_2 &= \lim_{z \to -\gamma} (1 + \gamma z^{-1}) Y(z) = \frac{\alpha \gamma}{1 + \gamma}. \end{aligned}$$

**Rozklad na parciální zlomky**

Zpětná transformace funkce

$$Y(z) = \frac{\alpha}{1 + \gamma} \left( \frac{1}{(1 - z^{-1})} + \frac{\gamma}{1 + \gamma z^{-1}} \right)$$

vede na řešení diferenční rovnice

$$y(k) = \frac{\alpha}{1 + \gamma} \left( 1 - (-\gamma)^{k+1} \right) 1(k),$$

které v případě stabilního trhu $\gamma = \dfrac{C}{D} < 1$ určuje limitní velikost ceny

$$\lim_{k \to \infty} c(k) = \frac{\alpha}{1 + \gamma} = \frac{B - A}{C + D}.$$

**Řešení**

Pro následující obrázek byly zvoleny hodnoty $A = 100, B = 120, C = 3, D = 4$.