Modelování systémů a procesů (611MSP)

Děčín – přednáška 5

Vlček, Kovář, Pěnička, Přikryl

5. přednáška 611MSP
čtvrtek 26. dubna 2012

Obsah

1 Přenos diskrétních systémů

1.1 Přenosová funkce

Přenosová funkce

Diferenční rovnice lineárního časově invariantního systému, za předpokladu nulových počátečních podmínek, tj. $y(n-k) = 0$ a $u(n-k) = 0$ pro $n-k < 0$, má tvar

$$a_N\, y(n-N) + a_{N-1}\, y(n-N+1) + \cdots + a_0\, y(n) = \\ = b_M\, u(n-M) + b_{M-1}\, u(n-M+1) + \cdots + b_0\, u(n)$$

tedy

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m u(n-m).$$

Přenosová funkce

Použijeme $\mathcal{Z}$-transformaci

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, \mathcal{Z}\left\{y(n-k)\right\} = \sum_{m=0}^{M} b_m \, \mathcal{Z}\left\{u(n-m)\right\}$$

a dostáváme algebraickou rovnici

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, z^{-k} \cdot Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m \, z^{-m} \cdot U(z).$$

Přenosová funkce

Nyní můžeme snadno vyjádřit $Y(z)$ ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \cdot U(z)$$
$$Y(z) = H(z) \cdot U(z).$$

Připomeňme si, že mezi vstupem a výstupem v časové rovině platí vztah

$$y(n) = \sum_{m=0}^{n} h(n-m) \cdot u(n)$$

1.2 Definice

Přenosová funkce

Funkce $H(z) = \mathcal{Z}\left\{h(n)\right\}$ je **přenosová funkce** a má tvar racionální lomené funkce v proměnné z^{-1}

$$H(z) = \frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{Q(z)}{N(z)}$$

Obraz přechodové odezvy

Funkce $S(z) = \mathcal{Z}\left\{s(n)\right\}$ je obrazem přechodové odezvy a z přenosové funkce ji určíme snadno jako

$$S(z) = H(z) \cdot \mathbb{1}(z) = H(z) \, \frac{1}{1 - z^{-1}} = H(z) \, \frac{z}{z-1}$$

2 Převod spojitého systému na diskrétní

2.1 Dopředné diference

Převod spojitého systému na diskrétní

Spojitý systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t) \tag{1}$$
$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(t) \tag{2}$$

můžeme převést na ekvivalentní diskrétní systém tak, že čas t nahradíme diskrétními časovými okamžiky $t = nT$, kde T je vzdálenost mezi následujícími časovými okamžiky, neboli **perioda vzorkování**.

Převod spojitého systému na diskrétní

Všechny veličiny měříme pouze v čase $t = nT$ a proto

$$\begin{aligned} x(t) &= x(nT) \to x(n), \\ y(t) &= y(nT) \to y(n), \\ u(t) &= u(nT) \to u(n). \end{aligned}$$

Derivaci stavu $\mathbf{x}'(t)$ nahradíme v prvním přiblížení první diferencí

$$\mathbf{x}'(t) \approx \frac{\mathbf{x}\left((n+1)\,T\right) - \mathbf{x}(nT)}{T} = \frac{1}{T}\left(\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}(n)\right).$$

Dosazením do (1) a (2) za dostaneme rovnici vývoje stavu ve formě

$$\frac{1}{T}\left(\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}(n)\right) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(n).$$

Tuto rovnici upravujeme dále.

Převod spojitého systému na diskrétní

Dosazením do původních spojitých stavových rovnic dostaneme po úpravě diskrétní tvar stavových rovnic

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= (\mathbf{1} + T\,\mathbf{A})\ \mathbf{x}(n) + T\mathbf{B}\,\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(n) \end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{N}\,\mathbf{u}(n) \\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\,\mathbf{u}(n) \end{aligned}$$

3 Stavový popis diskrétních systémů

3.1 Přenosová funkce

Vnější a vnitřní popis – příklad 1

Nalezněte přenosovou funkci $H(z)$ diskrétního LTI systému popsaného stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{N}\,\mathbf{u}(n)\\ \mathbf{y}(n) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(n)\end{aligned}$$

- Uvažujte pouze jeden vstup a výstup.
- Při odvození použijte $\mathcal{Z}$-transformaci!
- Která matice ve stavovém popisu je rozhodující pro stabilitu řešení?

3.2 Příklad

Vnější a vnitřní popis – příklad 1

S pomocí vztahů pro $\mathcal{Z}$-transformaci transformujeme rovnice

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(n+1) &= \mathbf{M}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{N}\,u(n)\\ y(n) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(n)\end{aligned}$$

na

$$\begin{aligned}z(\mathbf{X}(z) - \mathbf{x}(0)) &= \mathbf{M}\,\mathbf{X}(z) + \mathbf{N}\,U(z)\\ Y(z) &= \mathbf{C}\,\mathbf{Y}(z)\end{aligned}$$

Vnější a vnitřní popis – příklad 1

Protože přenosová funkce je definována pro $x(0) = 0$, obdržíme z první rovnice

$$\mathbf{X}(z) = (z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,U(z)$$

a dosazením do druhé rovnice je

$$Y(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,U(z)$$

Přenosová funkce $H(z)$ je tedy

$$H(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{C}\,\frac{\operatorname{adj}(z\mathbf{1} - \mathbf{M})}{\det(z\mathbf{1} - \mathbf{M})}\,\mathbf{N}$$

4 Stabilita diskrétních systémů

Příklad na rovnici 2. řádu

Diferenční rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

$$y(n+2) + a\,y(n+1) + b\,y(n) = u(n)$$

má za *nulových počátečních podmínek* přenosovou funkci

$$H(z) = \frac{1}{z^2 + a\,z + b} = \frac{1}{(z+z_1)(z+z_2)}.$$

Poloha pólů přenosové funkce $H(z)$ rozhoduje o stabilitě systému.

4.1 Kritérium stability

BIBO stabilita systému

BIBO stabilita – bounded input bounded output

Odezva na omezený vstupní signál musí být vždy omezená – systém je BIBO stabilní.

Odezva systému je kombinací

- odezvy na vstupní signál
- odezvy na počáteční podmínky

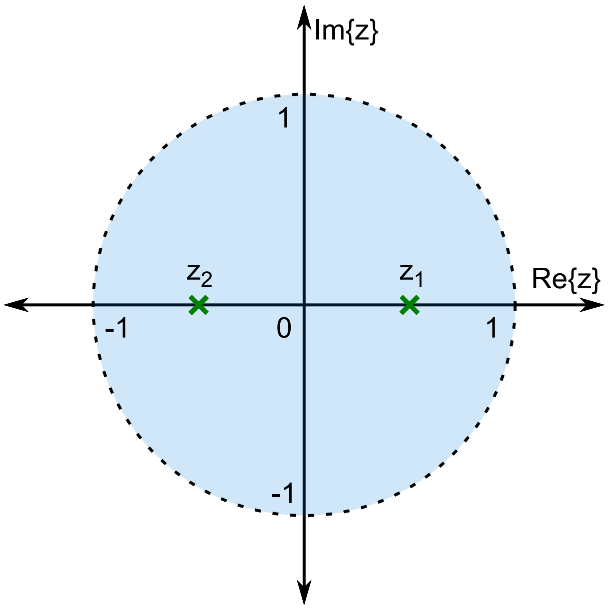
Kritérium stability

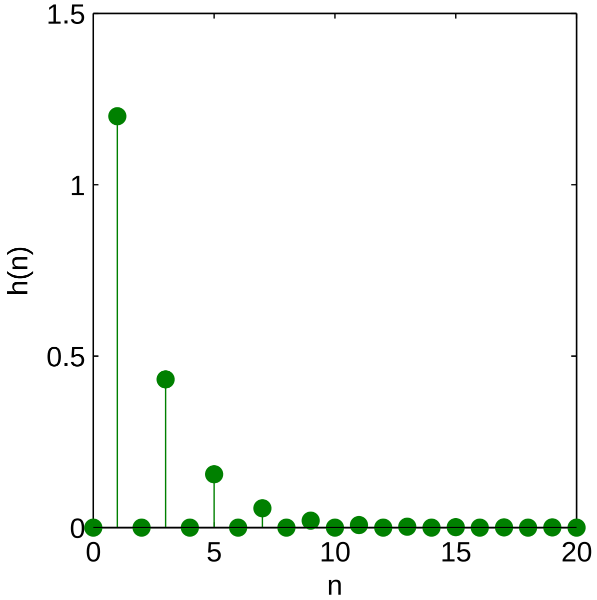
- **Stabilní systém** Všechny póly přenosové funkce $H(z)$ leží uvnitř jednotkové kružnice.
- **Nestabilní systém** Alespoň jeden pól přenosové funkce $H(p)$ leží vně jednotkové kružnice nebo alespoň jeden násobný pól leží na jednotkové kružnici.
- **Mez stability** Alespoň jeden jednoduchý pól leží na jednotkové kružnici a žádný pól neleží vně kružnice. Případné násobné póly leží uvnitř.

4.2 Stabilní systém

Stabilní systém

$$h(n) = (0{,}6)^n - (-0{,}6)^n$$
$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{1}{4}} = \frac{z^2}{(z-\frac{3}{5})(z+\frac{3}{5})}$$

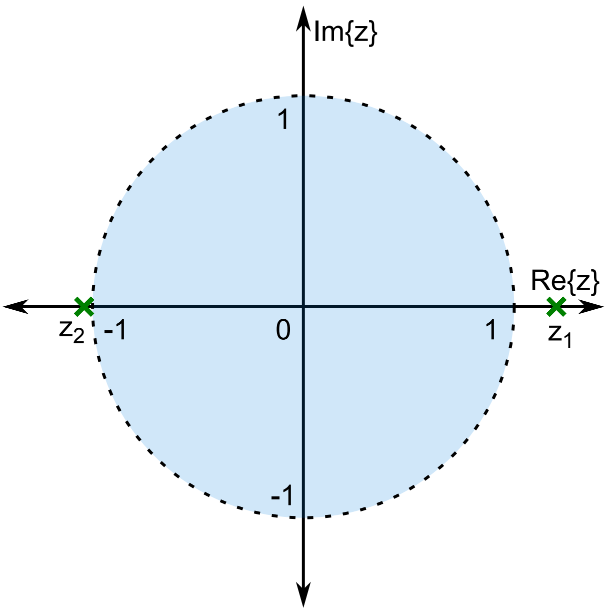


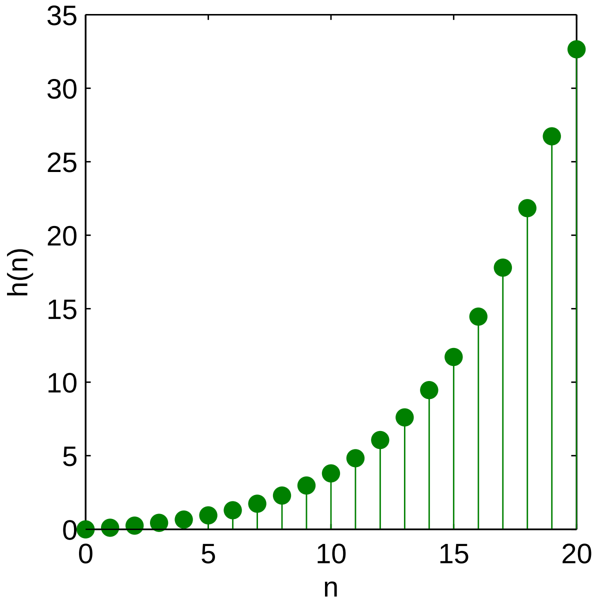


4.3 Nestabilní systém

Nestabilní systém

$$h(n) = \left(\frac{6}{5}\right)^n - \left(-\frac{12}{11}\right)^n$$
$$H(z) = \frac{1}{z^2 + \frac{6}{55} + \frac{72}{55}} = \frac{1}{(z - \frac{6}{5})(z + \frac{12}{11})}$$

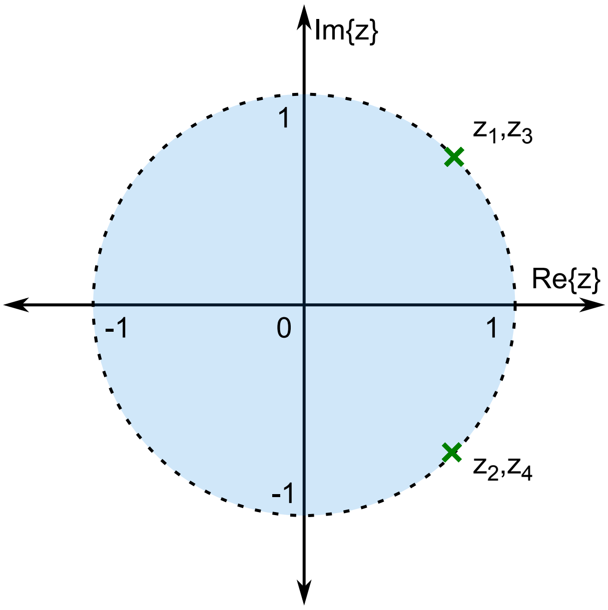


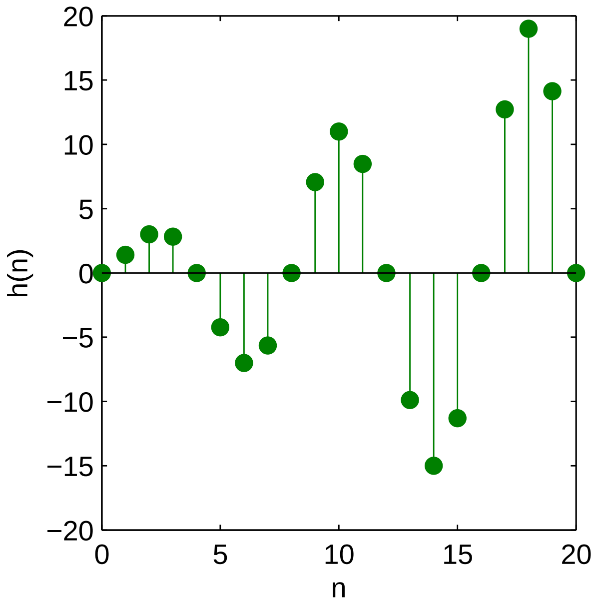


Nestabilní systém s násobnými póly

$$h(n) = \text{tbd}$$

$$H(z) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 - \sqrt{2}\,z + 1} = \frac{-0{,}5i}{\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)^2} + \frac{0{,}5i}{\left(z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)^2}$$



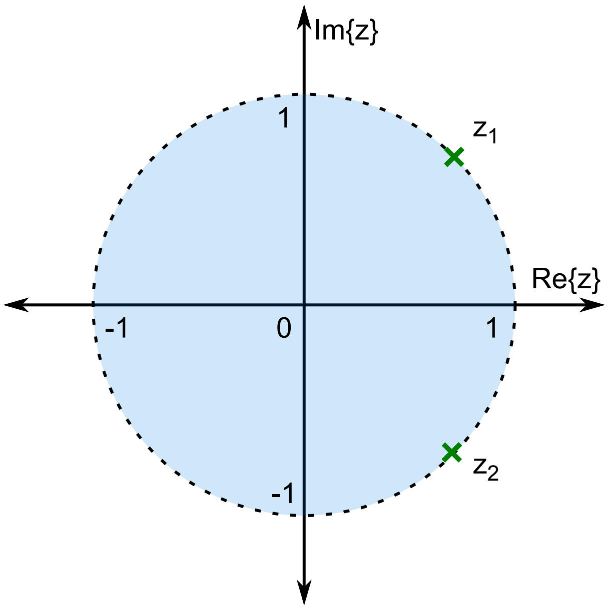


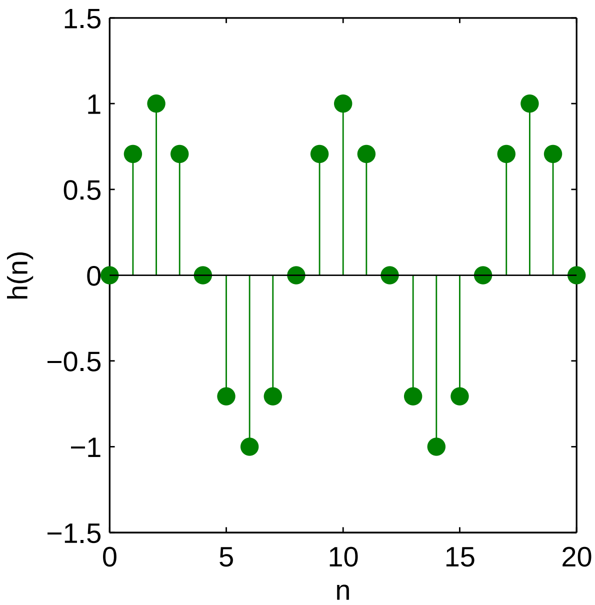
4.4 Mez stability

Mez stability s komplexně sdruženými póly

$$h(n) = \sin \tfrac{\pi}{4} n$$

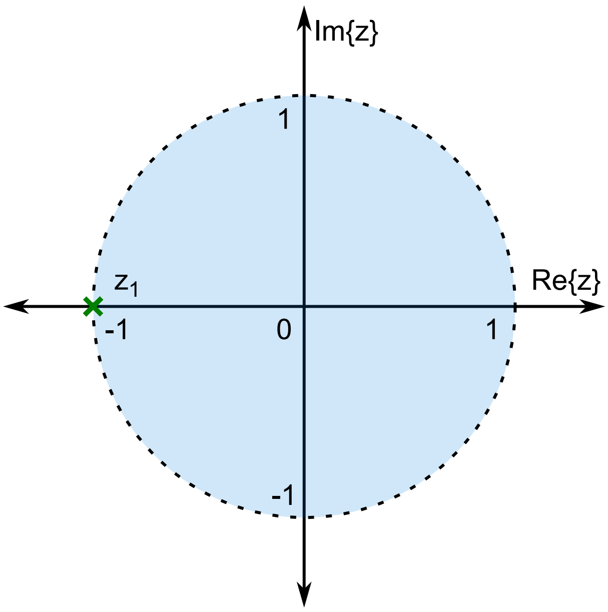
$$H(z) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{z^2 - \sqrt{2}\,z + 1} = \frac{-0{,}5i}{z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} + \frac{0{,}5i}{z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}$$

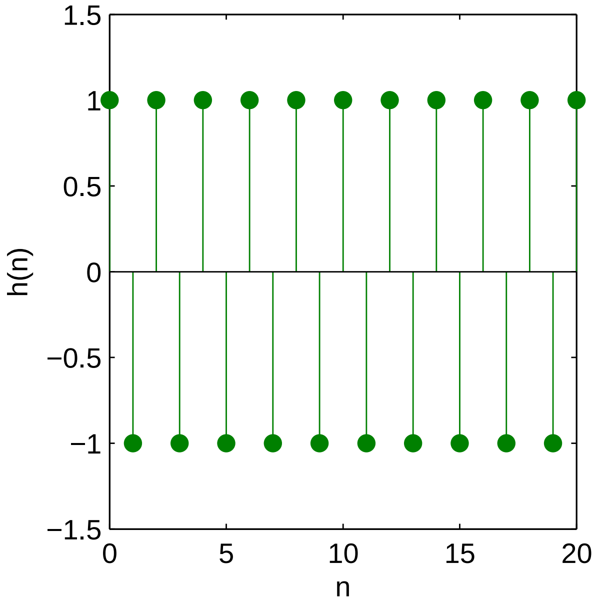




Mez stability s $(-1)^n$

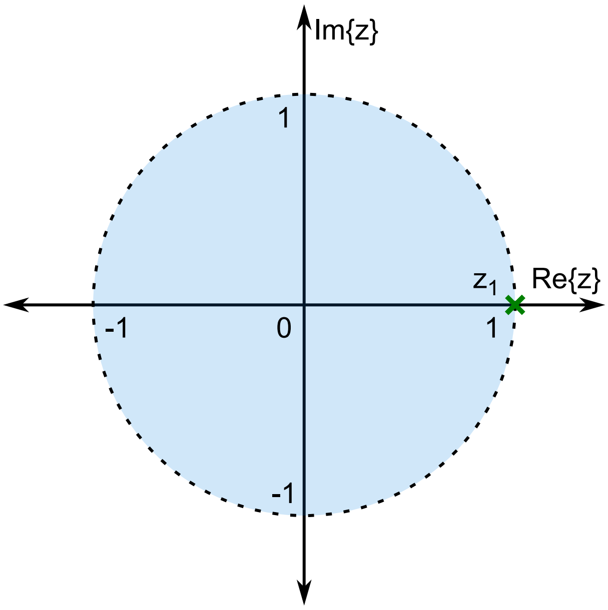
$$h(n) = (-1)^n$$
$$H(z) = \frac{1}{1+z^{-1}} = \frac{z}{z+1}$$

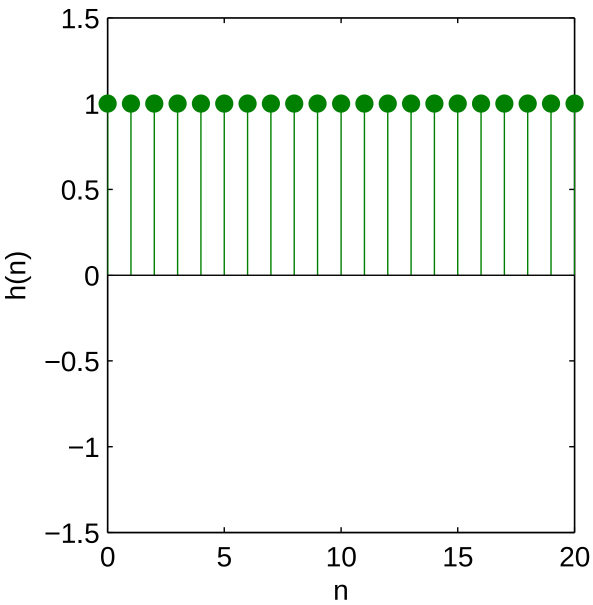




Mez stability s jednotkovým skokem

$$h(n) = (1)^n$$
$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$





5 Spojování systémů

Spojování subsystémů a vazby mezi systémy

Tři základní typy vazeb

Subsystémy mohou být spojeny třemi typy vazeb:

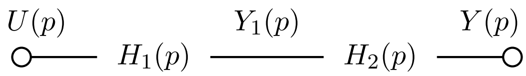
kaskádní (do série) – $H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p)$

paralelní – $H(p) = H_1(p) + H_2(p)$

zpětnovazební – $H(p) = \dfrac{H_1(p)}{1 \pm H_1(p) \cdot H_2(p)}$

5.1 Kaskádní

Kaskádní řazení

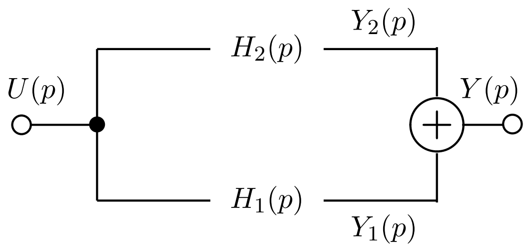


Pro výslednou přenosovou funkci kaskádního řazení dvou subsystémů platí

$$H(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} \cdot \frac{Y(p)}{Y_1(p)} = \frac{Y_1(p)}{U_1(p)} \cdot \frac{Y(p)}{U_2(p)} = H_1(p) \cdot H_2(p).$$

5.2 Paralelní

Paralelní řazení

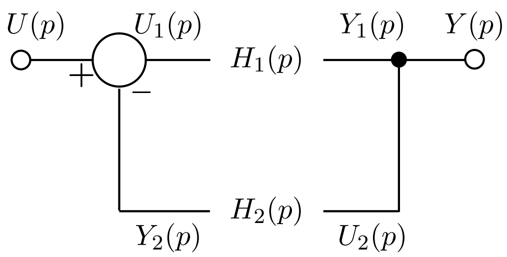


Pro výslednou přenosovou funkci paralelního řazení dvou subsystémů platí

$$H(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} + \frac{Y_2(p)}{U(p)} = H_1(p) + H_2(p).$$

5.3 Zpětnovazební

Zpětnovazební řazení



Pro výslednou přenosovou funkci zpětnovazebního řazení dvou subsystémů odvodíme postupně

$$\begin{aligned} \text{na výstupu} \qquad & Y_1(p) = Y(p) = U_2(p) \\ \text{na vstupu} \qquad & U_1(p) = U(p) - Y_2(p)\,. \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme výstupní $Y_1(p)$ a $Y_2(p)$ pomocí dílčích přenosových funkcí a dostaneme

$$\begin{aligned} Y(p) = Y_1(p) &= H_1(p) \cdot U_1(p) \\ &= H_1(p)\,(U(p) - Y_2(p)) \\ &= H_1(p)\,(U(p) - H_2(p) \cdot U_2(p)) \\ &= H_1(p)\,(U(p) - H_2(p) \cdot Y(p))\,. \end{aligned}$$

Vyjádříme nakonec

$$Y(p) + H_1(p) \cdot H_2(p) \cdot Y(p) = H_1(p) \cdot U(p),$$

a je

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p)}.$$

Přenos systému s jednoduchou **zápornou zpětnou vazbou** je dán poměrem přenosu přímé větve ku přenosu celé rozpojené smyčky zvětšenému o 1.

Pokud je zpětný signál na vstupu přičítán, hovoříme o **kladné zpětné vazbě** a znaménko ve jmenovateli je opačné

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_1(p)}{1 - H_1(p) \cdot H_2(p)}.$$

5.4 Dynamické vlastnosti

Dynamické vlastnosti spojovaných subsystémů

Na dynamických vlastnostech a časových odezvách se podílejí póly $[p_{1\infty\mu}, p_{2\infty\mu}]$ dílčích přenosových funkcí.

Pro

- **kaskádní** spojení se poloha pólů nemění,
- **paralelní** spojení se poloha pólů nemění, ale
- **zpětnovazební** spojení se poloha pólů *významně* mění.

Příklad – nalezení výsledné přenosové funkce

Do série s nestabilním systémem druhého řádu

$$H_1(p) = \frac{p^2 + 3p + 2}{p^2 - p + 1}$$

je zapojen zesilovací člen se zesílením A. Systém je uzavřen zápornou zpětnou vazbou. Určete $H(p)$.

Příklad – nalezení výsledné přenosové funkce

Výsledek je

$$H(p) = A\,\frac{p^2 + 3p + 2}{(A+1)\,p^2 + (3A-1)\,p + 2A + 1}$$