Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky
Fakulta dopravní ČVUT

28. a 29. února 2012

Přednášející:

- prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc. (vlcek@fd.cvut.cz)
  přednášky pro 3. ročník: úterý 8:00 – 9.30 & 9:45 – 11:15
  přednášky pro 2. ročník: středa 8:00 – 9.30 & 9:45 – 11:15

Cvičící 2. ročník:

- Ing. Bohumil Kovář, Ph.D. (kovar@utia.cas.cz)
- Dr. Ing. Jan Přikryl (prikryl@fd.cvut.cz)
- Ing. Lukáš Trejra (prikryl@fd.cvut.cz)

Cvičící 3. ročník:

- Mgr. Lucie Kárná, Ph.D. (karna@fd.cvut.cz)

- **Domovská stránka předmětu 11MSP**
  http://zolotarev.fd.cvut.cz/msp/

- **Domovská stránka předmětu 11MSAP**
  http://zolotarev.fd.cvut.cz/msap/

- **Videozáznam přednášek, včetně titulků**
  Na webu předmětu v oddíle Přednášky/Praha

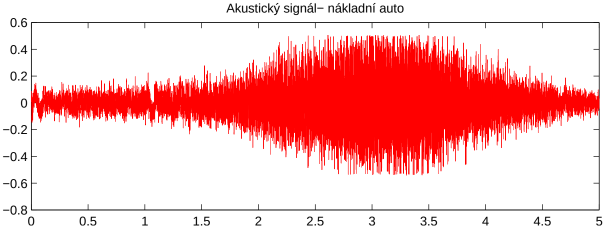
Literatura

1. G. E. Carlson: Signal and Linear System Analysis with MATLAB, John Wiley and Sons. Inc., 1998.
2. Davendra K. Chaturvedi: Modeling and Simulation of Systems Using MATLAB and Simulink, CRC Press, Taylor& Francis Group, NW, 2010.
3. R. G. D. Allen: Matematická ekonomie, ACADEMIA, Praha, 1971.
4. Informace o prostředí MATLAB http://zolotarev.fd.cvut.cz/mni
5. Matematika-opakování http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml1/

1. Celkový počet bodů, které studenti mohou během semestru získat, je 40 – z toho se ke zkoušce započítá maximálně 30. Zápočet udělujeme od 25 bodů výše. Body jsou rozděleny následovně:
   - 10 bodů za testy a domácí úkoly,
   - 4 body za tři automaticky hodnocené domácí úkoly,
   - 12 bodů za dva praktické testy z Matlabu a Simulinku (resp. za model systému, který souvisí s tématem bakalářské práce, a jeho simulace v prostředí Matlab/Simulink),
   - 14 bodů za závěrečný test (dva početní příklady po pěti bodech a dvě doplňkové otázky za dva body).

1. V průběhu semestru bude vyhlášeno několik bonusových úloh, jejichž úspěšní a nejrychlejší řešitelé budou odměněni až dvěma bonusovými body. Bonusové body se přičítají k celkovému bodovému zisku v semestru.
2. Bodování zaručuje, že v případě získání zápočtu (25 bodů a výše) můžete automaticky předmět absolvovat s klasifikací dostatečně, případně uspokojivě.
3. V případě, že máte zájem o lepší hodnocení, můžete zbylých 20 bodů získat u zkoušky.

zadání	odevzdání	téma domácího úkolu
6. a 7. března	12. resp. 13. března	typy systémů
27. a 28. března	2. resp. 3. dubna	Laplaceova transformace
3. a 4. dubna	9. resp. 10. dubna	zpětná Laplaceova transformace a řešení diferenciálních rovnic
10. a 9. května	14. resp. 15. května	$\mathcal{Z}$-transformace
15. a 16. května	21. resp. 22. května	zpětná $\mathcal{Z}$-transformace a řešení diferenčních rovnic



a teď jeho zvuk

1. Znalost základních pojmů a operací s vektory a maticemi
2. Znalost práce s komplexními čísly a základů funkcí komplexní proměnné
3. Znalost vlastností trigonometrických, hyperbolických, exponenciálních funkcí
4. Znalost výpočtu součtů nekonečné řady, derivace a integrálů funkce jedné proměnné
5. Znalost práce se zlomky, algebraickými výrazy a běžné středoškolské matematiky

1. Znalost použití Laplaceovy transformace pro řešení diferenciálních rovnic popisujících spojité lineární časově invariantní systémy
2. Znalost použití $\mathcal{Z}$-transformace pro řešení diferenčních rovnic popisujících diskrétní lineární časově invariantní systémy
3. Znalost nalezení stavového popisu ze slovního zadání dynamického systému
4. Znalost použití pojmu stabilita řešení a metody ověření stability dynamického systému
5. Znalost prostředí MATLAB/SIMULINK pro modelování dynamických systémů a řešení soustav nelineárních diferenciálních a diferenčních rovnic

Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

- systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,
- systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.

Otázky:

- Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- Jak ověříme pevnost nového mostu?
- Jak ověříme bezpečnost sofwaru?

Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!

Vnitřní, tzv. stavový popis systému používá k popisu dynamiky vektor vnitřních stavů $\vec{x}$.

Vektor vstupů $\vec{u}$ a vektor výstupních veličin $\vec{y}$ jsou druhotné veličiny vnitřního popisu.

Stavové modely popisujeme soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a soustavy diferenčních rovnic prvého řádu pro systémy s diskrétním časem.

Vnější popis vychází z popisu systému vektorem vstupu $\vec{u}$ a vektorem výstupu $\vec{y}$.

Systém tak chápeme jako černou skříňku, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat jeho reakci na vnější události (signály, data).

Vnější model popisujeme diferenciální rovnicí pro systémy se spojitým časem a diferenční rovnicí pro systémy s diskrétním časem. Uvedená rovnice je obecně vyššího řádu než 1.

- Příběh párových prvočísel (např. 17 a 19,...), největší dosud známé prvočíselné páry jsou

$$16869987339975 \times 2^{171960} \pm 1$$

$$100314512544015 \times 2^{171960} \pm 1$$

- Příběh, ve kterém pošetilý matematik nachytal firmu INTEL při předstírání, že chyba Pentia neexistuje (1995)
- Thomas Nicely, Lynchburg College, Virginia

$$\text{harmonická řada} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \rightarrow \infty$$

$$\text{prvočíselná harmonická řada} \sum_{\forall p}^{\infty} \frac{1}{p} \rightarrow \infty$$

divergují

- avšak harmonická řada s párovými prvočísly

$$\sum_{\forall p_2}^{\infty} \frac{1}{p_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \quad \dots \quad + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \dots$$

konverguje $\rightarrow$ 1.902160583104

- Zde nastupuje experimentální matematika
- Thomas Nicely (1996) obdržel hodnotu

$\rightarrow$ 1.9021605778

a objevil chybu v CPU Pentia

- rozšířil svoje podezření pomocí internetu a odezva byla jednoznačná, aritmetická jednotka Pentia je chybné

- Tim Coe, Vitesse Semiconductor, Southern California

$$c = \frac{4195835}{3145727} = \frac{5 \times 7 \times (2^3 \times 3^4 \times 5 \times 37 + 1)}{3 \times 2^{20} - 1} =$$

$$= 1.33382044\ldots$$

- Pentium procesor však dával hodnotu

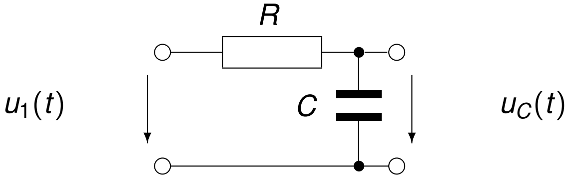
$$c = \frac{4195835}{3145727} = \frac{5 \times 7 \times 119881}{13 \times 241979} = 1.33373906\ldots$$

- chyba při reprezentaci čísel typu

$$M_n = 2^n - 1$$

tzv. Mersenneova čísla

integrační RC článek



Napětí $u_1(t)$ na RC článku je součet napětí na rezistoru $u_R(t)$ a na kapacitoru $u_C(t)$:

$$u_1(t) = u_R(t) + u_C(t), \tag{1}$$

Proud procházející obvodem $i(t)$ a časový průběh napětí na rezistoru $u_R(t)$ je možno vyjádřit

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \tag{2}$$

$$u_R(t) = Ri(t) = RC\frac{du_C}{dt}, \tag{3}$$

Dosazením $u_R(t)$ do (1) získáme diferenciální rovnici prvního řádu pro časový průběh napětí na kapacitoru $u_C(t)$:

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_1(t). \tag{4}$$

Řešení uvedené rovnice má pro všechna $t \geq 0$

$$\alpha = \frac{1}{RC}$$

$$u_1(t) = U_0$$

a pro počáteční hodnotu

$$u_C(0) = 0$$

tvar

$$u_C(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}).$$

Rovnice nabídky

Nabídka dnes závisí na včerejší ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n(k) = \mathcal{C}c(k-1) + \mathcal{A}x(k). \quad (5)$$

Rovnice poptávky

Poptávka dnes závisí na dnešní ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

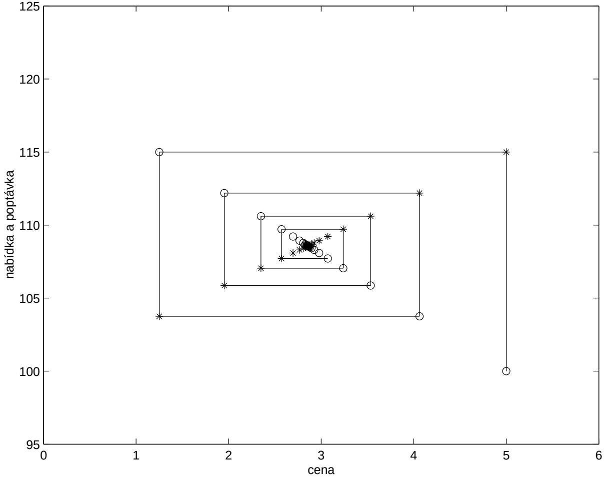
$$p(k) = -\mathcal{D}c(k) + \mathcal{B}x(k). \quad (6)$$

Rovnost nabídky a poptávky

$$n(k) = p(k) \quad (7)$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c(k) + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}c(k-1) = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}}x(k). \quad (8)$$



Pavučinkový diagram - variace ceny.

Děkuji za pozornost