Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

Ústav aplikované matematiky
ČVUT v Praze, Fakulta dopravní

21. února 2013

Přednášející:

- prof. RNDr. Miroslav Vlček, DrSc. (vlcek@fd.cvut.cz)
  přednášky čt. 8.00 - 9.30 & 9.45 - 11.15

Cvičící:

- Ing. Bohumil Kovář, Ph.D. (kovar@utia.cas.cz)
- Dr. Ing. Jan Přikryl (prikryl@fd.cvut.cz)
- Mgr. Lucie Kárná, Ph.D. (karna@fd.cvut.cz)

Domovská stránka předmětu MSP
http://zolotarev.fd.cvut.cz/msp

Cvičení:
Pravidla jsou na stránkách předmětu.

Cvičení pro druhý zápis:
Vzhledem ke kapacitě počítačových laboratoří není možné, aby studenti opakující předmět navštěvovali cvičení. Budou odevzdávat elektronicky zadávané domácí úlohy a v průběhu semestru pro ně vypíšeme dva termíny, na kterých si napíšou písemné testy.

Literatura

1. G. E. Carlson: Signal and Linear System Analysis with MATLAB, John Wileys and Sons. Inc., 1998.
2. Davendra K. Chaturvedi: Modeling and Simulation of Systems Using MATLAB and Simulink, CRC Press, Taylor& Francis Group, NW, 2010.
3. R. G. D. Allen: Matematická ekonomie, ACADEMIA, Praha, 1971.
4. Informace o prostředí MATLAB
   http://zolotarev.fd.cvut.cz/mni/
   http://www.fd.cvut.cz/personal/nagyivan/PrpStat/Prp/MatIntro.pdf
5. Matematika-opakování
   http://euler.fd.cvut.cz/predmety/ml1/

Celkový počet bodů, které studenti mohou během semestru získat, je 40 z toho se ke zkoušce započítá maximálně 30.

Zápočet udělujeme od 25 bodů výše.

Body jsou rozděleny následovně:

- 10 bodů za domácí úkoly a jim příslušející testy,
- 4 body za tři automaticky hodnocené domácí úkoly,
- 12 bodů za dva praktické testy z Matlabu a Simulinku,
- 14 bodů za závěrečný test (dva početní příklady po pěti bodech a dvě doplňkové otázky za dva body).

V průběhu semestru bude vyhlášeno několik bonusových úloh, jejichž úspěšní a nejrychlejší řešitelé budou odměněni až dvěma bonusovými body. Bonusové body se přičítají k celkovému bodovému zisku v semestru.

Bodování zaručuje, že v případě získání zápočtu (25 bodů a výše) můžete automaticky předmět absolvovat s klasifikací dostatečně, případně uspokojivě.

V případě, že máte zájem o lepší hodnocení, můžete zbylých 20 bodů získat u zkoušky.

	Téma domácího úkolu
1.	Typy systémů
2.	Laplaceova transformace
3.	Zpětná Laplaceova transformace a řešení diferenciálních rovnic
4.	Z-transformace
5.	Zpětná z-transformace a řešení diferenčních rovnic

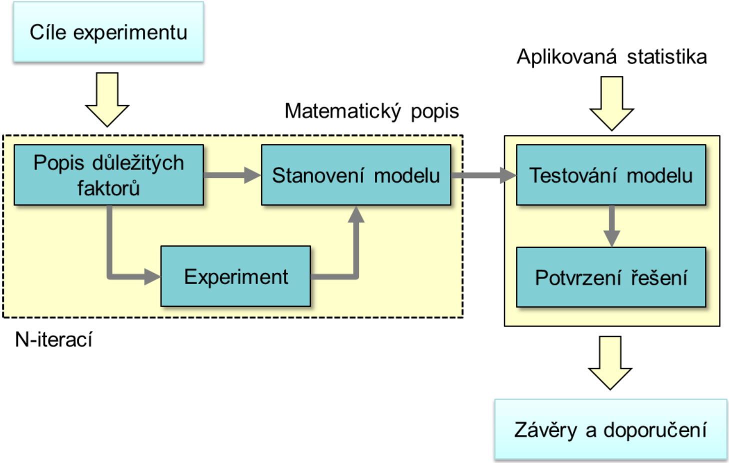
1. Znalost základních pojmů a operací s vektory a maticemi
2. Znalost práce s komplexními čísly a základů funkcí komplexní proměnné
3. Znalost vlastností trigonometrických, hyperbolických, exponenciálních funkcí
4. Znalost výpočtu součtů nekonečné řady, derivace a integrálů funkce jedné proměnné
5. Znalost práce se zlomky, algebraickými výrazy a běžné středoškolské matematiky
6. Základní znalosti prostředí MATLAB (viz statistika a pravděpodobnost)

1. Znalost použití Laplaceovy transformace pro řešení diferenciálních rovnic popisujících spojité lineární časově invariantní systémy
2. Znalost použití $\mathcal{Z}$-transformace pro řešení diferenčních rovnic popisujících diskrétní lineární časově invariantní systémy
3. Znalost nalezení stavového popisu ze slovního zadání dynamického systému
4. Znalost použití pojmu stabilita řešení a metody ověření stability dynamického systému
5. Znalost prostředí MATLAB/SIMULINK pro modelování dynamických systémů a řešení soustav nelineárních diferenciálních a diferenčních rovnic

Charakteristické vlastnosti, se kterými vystačíme při modelování:

- systém považujeme za část prostředí, kterou lze od jejího okolí oddělit fyzickou nebo myšlenkovou hranicí,
- systém se skládá z podsystémů, vzájemně propojených součástí.

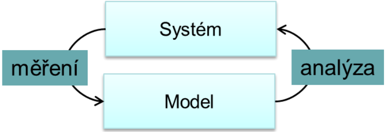
Je to část našeho světa, která se svým okolím nějak interaguje, například prostřednictvím vstupu a výstupu.

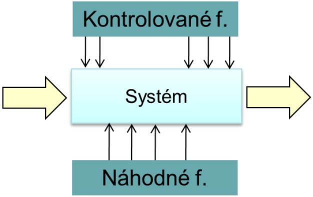

Cíle experimentu
Aplikovaná statistika
Matematický popis
Popis důležitých faktorů
Stanovení modelu
Testování modelu
Experiment
Potvrzení řešení
N-iterací
Závěry a doporučení

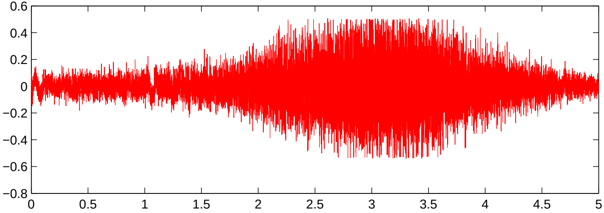
Při analýze navrženého modelu chceme učinit co možná nejsilnější rozhodnutí na základě malého množství dat. Správnost našeho návrhu je nutné statisticky vyhodnotit.

Problémy:

1. Významné diference ve sledovaných parametrech mohou být způsobeny špatným návrhem modelu, případně měřením dat
2. Je těžké rozlišit, zda diference v datech jsou skutečné nebo způsobené „náhodným vlivem".





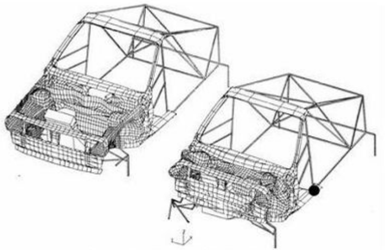


a teď jeho zvuk

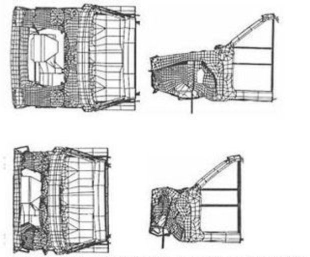
Otázky:

- Jak ověříme správnost výpočtu rychlosti šíření ptačí chřipky?
- Jak ověříme pevnost nového mostu?
- Jak ověříme bezpečnost sofwaru?

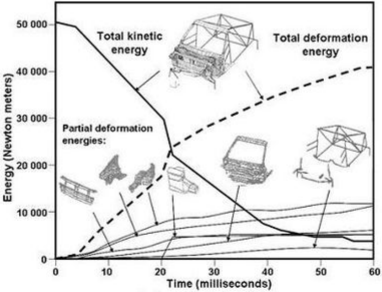
Pokud nemůžeme předem prokázat určité vlastnosti na samotného systému, prokážeme hledané vlastnosti na jeho modelu!



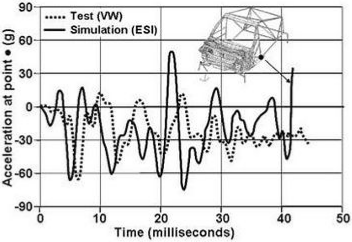
(a) crash simulation



(b) top and side views of simulation



(c) energy balance



(d) acceleration at point in cabin

Vnější popis vychází z popisu systému vektorem vstupu **u** a vektorem výstupu **y**.

Systém tak chápeme jako černou skříňku, o jejíchž vlastnostech se dozvíme pouze tehdy, jestliže budeme zkoumat jeho reakci na vnější události (signály, data).

Vnější model popisujeme diferenciální rovnicí pro systémy se spojitým časem a diferenční rovnicí pro systémy s diskrétním časem. Uvedená rovnice je obecně vyššího řádu než 1.

Vnitřní, tzv. stavový popis systému používá k popisu dynamiky vektor vnitřních stavů **x**.
Vektor vstupů **u** a vektor výstupních veličin **y** jsou druhotné veličiny vnitřního popisu.

Stavové modely popisujeme soustavou diferenciálních rovnic prvního řádu pro systémy se spojitým časem a soustavy diferenčních rovnic prvého řádu pro systémy s diskrétním časem.

Modelování není samospasitelné:

- výstupy modelu je vždy třeba ověřovat,
- možné chyby jsou jak v modelu tak i v jeho výpočtu.

Verifikace: Počítáme správný model.

Validace: Model počítá správně.

- Příběh párových prvočísel (např. 17 a 19,...), největší dosud známé prvočíselné páry jsou

$$16869987339975 \times 2^{171960} \pm 1$$

$$100314512544015 \times 2^{171960} \pm 1$$

- Příběh, ve kterém pošetilý matematik nachytal firmu INTEL při předstírání, že chyba Pentia neexistuje (1995)
- Thomas Nicely, Lynchburg College, Virginia

$$\text{harmonická řada} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \to \infty$$

$$\text{prvočíselná harmonická řada} \sum_{\forall p} \frac{1}{p} \to \infty$$

divergují

- avšak harmonická řada s párovými prvočísly

$$\sum_{\forall p_2}^{\infty} \frac{1}{p_2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \quad \ldots \quad + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \ldots$$

konverguje $\rightarrow$ 1.902160583104

- Zde nastupuje experimentální matematika
- Thomas Nicely (1996) obdržel hodnotu

$\rightarrow$ 1.9021605778

  a objevil chybu v CPU Pentia
- rozšířil svoje podezření pomocí internetu a odezva byla jednoznačná, aritmetická jednotka Pentia je chybné

- Tim Coe, Vitesse Semiconductor, Southern California

$$c = \frac{4195835}{3145727} = \frac{5 \times 7 \times (2^3 \times 3^4 \times 5 \times 37 + 1)}{3 \times 2^{20} - 1} =$$

$$= 1.33382044\ldots$$

- Pentium procesor však dával hodnotu

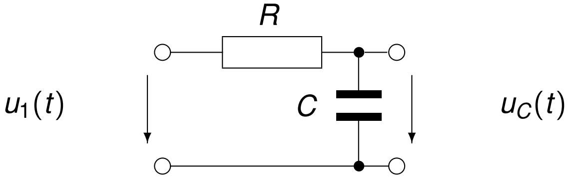
$$c = \frac{4195835}{3145727} = \frac{5 \times 7 \times 119881}{13 \times 241979} = 1.33373906\ldots$$

- chyba při reprezentaci čísel typu

$$M_n = 2^n - 1$$

tzv. Mersenneova čísla

integrační RC článek



Napětí $u_1(t)$ na RC článku je součet napětí na rezistoru $u_R(t)$ a na kapacitoru $u_C(t)$:

$$u_1(t) = u_R(t) + u_C(t), \tag{1}$$

Proud procházející obvodem $i(t)$ a časový průběh napětí na rezistoru $u_R(t)$ je možno vyjádřit

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} \tag{2}$$

$$u_R(t) = Ri(t) = RC\frac{du_C}{dt}, \tag{3}$$

Dosazením $u_R(t)$ do (1) získáme diferenciální rovnici prvního řádu pro časový průběh napětí na kapacitoru $u_C(t)$:

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_1(t). \tag{4}$$

Řešení uvedené rovnice má pro všechna $t \geq 0$

$$\alpha = \frac{1}{RC}$$

$$u_1(t) = U_0$$

a pro počáteční hodnotu

$$u_C(0) = 0$$

tvar

$$u_C(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}).$$

Rovnice nabídky

Nabídka dnes závisí na včerejší ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n(k) = \mathcal{C}c(k-1) + \mathcal{A}x(k). \tag{5}$$

Rovnice poptávky

Poptávka dnes závisí na dnešní ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

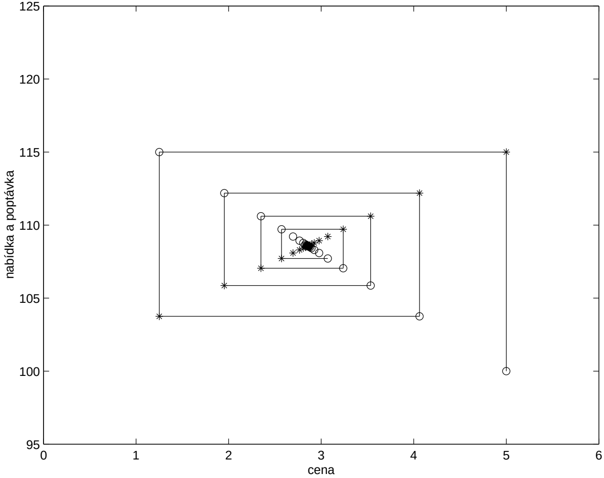
$$p(k) = -\mathcal{D}c(k) + \mathcal{B}x(k). \tag{6}$$

Rovnost nabídky a poptávky

$$n(k) = p(k) \tag{7}$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c(k) + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}}c(k-1) = \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}}x(k). \tag{8}$$



Pavučinkový diagram - variace ceny.

Děkuji za pozornost