Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

6. března 2012

Obsah

1. Iterace diferenční rovnice
2. Úvod to teorie signálů
   - Základní spojité signály
   - Základní diskrétní signály
3. Vnější popis systémů
   - Diskrétní systém
   - Lineární a nelineární
   - Časově invariantní, resp. stacionární systém

Obsah

1. Iterace diferenční rovnice
2. Úvod to teorie signálů
   - Základní spojité signály
   - Základní diskrétní signály
3. Vnější popis systémů
   - Diskrétní systém
   - Lineární a nelineární
   - Časově invariantní, resp. stacionární systém

Obsah

1. Iterace diferenční rovnice

2. Úvod to teorie signálů
   - Základní spojité signály
   - Základní diskrétní signály

3. Vnější popis systémů
   - Diskrétní systém
   - Lineární a nelineární
   - Časově invariantní, resp. stacionární systém

Iterace rovnice ceny

Diferenční rovnici, kterou jsme odvodili

$$c(k) + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c(k-1) = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} x(k). \tag{1}$$

přepíšeme do kanonického tvaru

$$y(k) + \gamma y(k-1) = \beta x(k). \tag{2}$$

a postupnými iteracemi nalezneme pro $x(k) = 1(k)$ a počáteční podmínku $y(-1) = 0$

Iterace rovnice ceny

Pro $k = 0$

$$\begin{aligned} y(0) + \gamma y(-1) &= \beta x(0) \\ y(0) &= \beta - \gamma y(-1) = \beta \end{aligned}$$

Pro $k = 1$

$$\begin{aligned} y(1) + \gamma y(0) &= \beta x(1) \\ y(1) &= \beta - \gamma y(0) = \beta - \beta\gamma \end{aligned}$$

Iterace rovnice ceny

Pro $k = 2$

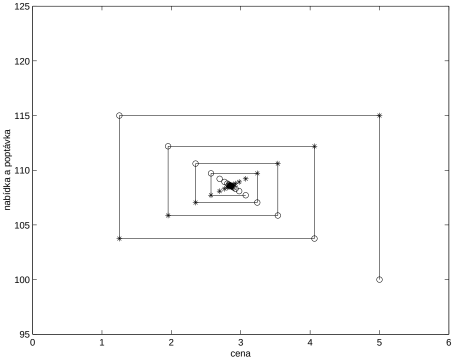
$$\begin{aligned} y(2) + \gamma y(1) &= \beta x(2) \\ y(2) &= \beta - \gamma y(1) = \beta - \beta\gamma + \beta\gamma^2 \end{aligned}$$

Pro k

$$\begin{aligned} y(k) + \gamma y(k-1) &= \beta x(k) \\ y(k) &= \beta - \gamma y(k-1) = \beta(1 - \gamma + \gamma^2) \sum_{m=0}^{k} (-\gamma)^m \end{aligned}$$

Iterace rovnice ceny

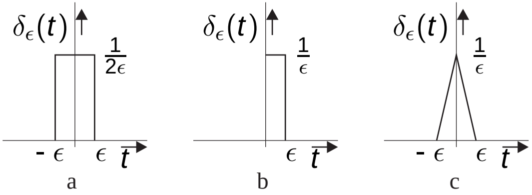
$$y(k) \quad = \quad \beta \sum_{m=0}^{k} (-\gamma)^m,$$



Obrázek: Dosadíme toto řešení do rovnic pro nabídku a poptávku a získáme pavučinkový diagram.

Jednotkový impuls

Tato funkce je definovány na časovém intervalu pro všechna t a její nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu $t = 0$. Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé $\varepsilon > 0$.



Obrázek: Konečná representace $\delta_\epsilon(t)$ pro $\epsilon > 0$.

Definujme funkci $\delta(t)$ jako $\delta(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \delta_\epsilon(t)$.

Jednotkový impuls

Funkce $\delta(t)$ se nazývá Diracův impuls, Diracova δ-funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota δ-funkce pro $t \neq 0$ je $\delta(t) = 0$. Její hodnota v $t = 0$ není definována jako funkce, a proto se používá integrální definice

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t)dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t)dt = 1 \qquad (3)$$

pro každé $\epsilon > 0$.

Jednotkový skok

Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena $1(t)$ a je definována jako

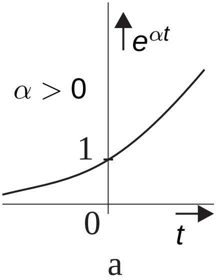
$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0\,. \end{cases} \tag{4}$$

Reálná exponenciála

Uvažujme exponenciální funkci

$$f(t) = e^{\alpha t}, \tag{5}$$

kde α je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.



Obrázek: Reálná exponenciála a) pro $\alpha > 0$, b) pro $\alpha < 0$.

Periodická funkce

O spojitém signálu $f(t)$ říkáme, že je periodický s periodou T_P, jestliže platí

$$f(t + T_P) = f(t) \tag{6}$$

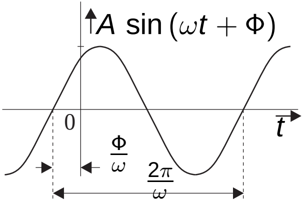
pro všechna T_P a platí

$$f(t) = f(t + T_P) = f(t + 2T_P) = \cdots = f(t + kT_P)$$

pro všechna k celá čísla.

Sinusová funkce

$$f(t) = A\,\sin(\omega t + \Phi), \tag{7}$$



Obrázek: Sinusový signál.

Konstanty A, ω a Φ se nazývají amplituda, úhlová frekvence a fázový posuv. Sinusovka je periodická se základní periodou $T_P = 2\pi/\omega$.

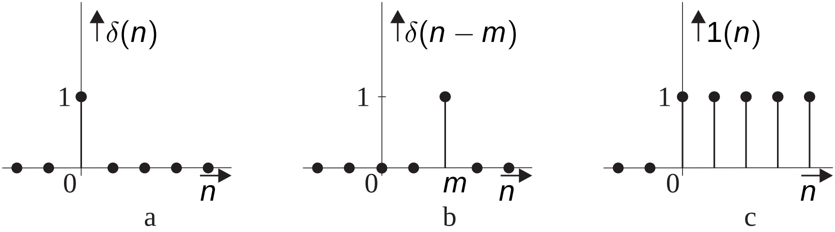
Vznik diskrétních signálů

- přirozeně např. průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů
- vzorkováním spojitých signálů např. naměření teploty každou hodinu, měřením průtoku

Diskrétní jednotkový impuls

Diskrétní jednotkový impuls $\delta(n)$ je definován vztahem

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0 \,. \end{cases} \tag{8}$$



Obrázek: Diskrétní signály a) jednotkový impuls, b) posunutý jednotkový impuls, c) jednotkový skok.

Diskrétní jednotkový skok

Diskrétní jednotkový skok $1(n)$ je definován vztahem

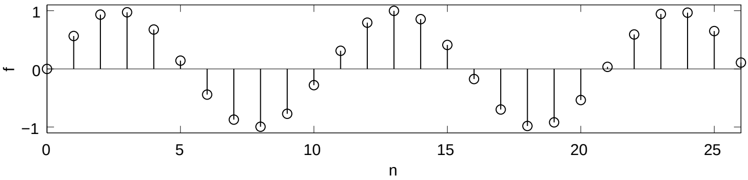
$$1(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases} \tag{9}$$

Diskrétní sinusová posloupnost

Mějme sinusový signál $f(t) = \sin\,\omega_0 t$ s periodou $T_P = 2\pi/\omega_0$. Pokud tento signál vzorkujeme s periodou $T > 0$, získáme diskrétní sinusový signál

$$f(nT) = \sin\,\omega_0 nT\,, \qquad (10)$$

kde $n = 0,\ \pm1,\ \pm2, \ldots$. Pokud není nutné uvádět periodou T, píšeme pouze $f(n)$.



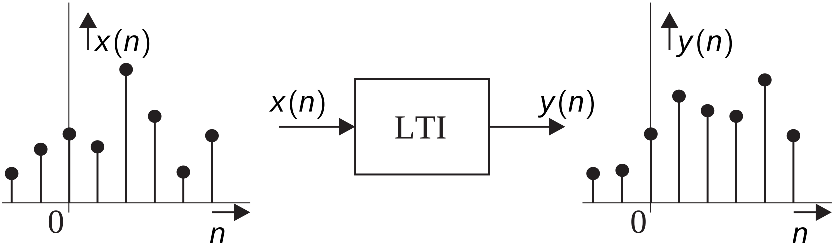
Diskrétní sinusová posloupnost

Diskrétní signál $f(n)$ je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo N takové, že platí

$$f(n) = f(n+N) = f(n+2N) = \cdots = f(n+kN) \tag{11}$$

pro všechna n z intervalu $(-\infty,\ \infty)$ a pro libovolné celé k. N se nazývá perioda diskrétního signálu.

Diskrétní systém



Obrázek: Diskrétní LTI systém

Diskrétní systém

Odezvu na jednotkový impuls $\delta(n)$ budeme nazývat impulsní odezva $h(n)$

$$h(n) = \mathcal{S}\left[\delta(n)\right] \qquad \& \qquad h(n,m) = \mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] . \tag{12}$$

Odezvu na jednotkový skok $1(n)$

$$1(n) = \sum_{m=0}^{n} \delta(n-m) = \tag{13}$$
$$\delta(n) + \delta(n-1) + \cdots + \delta(1) + \delta(0) \,,$$

nazveme přechodovou odezvou $s(n)$.

Diskrétní systém

...a platí

$$
\begin{aligned}
s(n) &= \mathcal{S}\left[1(n)\right] = \mathcal{S}\left[\sum_{m=0}^{n} \delta(n-m)\right] \qquad (14)\\
&= \sum_{m=0}^{n} \mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] = \sum_{m=0}^{n} h(n,m)\,.
\end{aligned}
$$

Postupná úprava rovnice (14) je umožněna právě díky linearitě systému, kterou budeme studovat pro obecný vstupní signál

$$
x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\,. \qquad (15)
$$

Lineární systém

Řekli jsme si, že systém není nic jiného, než černá skříňka black box, kterou se pokoušíme nejprve identifikovat a poté reprodukovat. Při identifikaci se nejprve ptáme, zda se jedná o systém lineární.

Pro vstupní $x(n)$ a výstupní $y(n)$ signál pak platí princip superpozice

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{S}\left[x(n)\right] = \mathcal{S}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n,m) \end{aligned} \tag{16}$$

Příklad lineárního systému $y(n) + ay(n-1) = x(n)$

Kombinací dvou různých vstupních signálů
$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$

$$\begin{aligned} a_1\left[y_1(n) + ay_1(n-1)\right] &= a_1 x_1(n) \\ a_2\left[y_2(n) + ay_2(n-1)\right] &= a_2 x_2(n) \end{aligned}$$

dostanem lineární kombinaci výstupních signálů a pro
$y(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n)$ platí

$$y(n) + ay(n-1) = x(n)\,.$$

Příklad nelineárního systému

Numerický výpočet odmocniny

$$y(n) = \frac{1}{2}\left[y(n-1) + \frac{x(n-1)}{y(n-1)}\right]. \tag{17}$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna $\sqrt{10} = 3.16227766017$. Pro $x(n-1) \equiv x(0) = 10$ dostáváme postupně

$$\begin{array}{ll} y(1) = 3 & y^2(1) = 9 \\ y(2) = 3.165 & y^2(2) = 10.017225 \\ y(3) = 3.162278 & y^2(3) = 10.00000214928 \\ y(4) = 3.1622776601 & y^2(3) = 9.999999999568 \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

Časově invariantní systém

Systém se nazývá časově invariantní, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí) $n-m$ nikoliv na každém časovém okamžiku n a m samostatně.

$$\begin{aligned} \text{dneska}\ldots \quad y(n) &= \mathcal{S}\left[x(n)\right] \\ \text{včera}\ldots \quad y(n-1) &= \mathcal{S}\left[x(n-1)\right] \qquad (18) \\ &\vdots \qquad (19) \end{aligned}$$

Potom také rovnice (12) pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

$$h(n,m) \to h(n-m) = \mathcal{S}\left[\delta(n-m)\right] . \qquad (20)$$

Konvoluce

V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice (16) konvoluční sumu

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)x(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\,, \qquad (21)$$

která bývá občas značená

$$y(n) = h(n) * x(n)\,. \qquad (22)$$