

# Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

28. února 2013



# Obsah

- 1 Iterace diferenční rovnice
- 2 Úvod to teorie signálů
  - Základní spojité signály
  - Základní diskrétní signály
- 3 Vnější popis systémů
  - Diskrétní systém
  - Lineární a nelineární
  - Časově invariantní, resp. stacionární systém



# Obsah

- 1 Iterace diferenční rovnice
- 2 Úvod to teorie signálů
  - Základní spojité signály
  - Základní diskrétní signály
- 3 Vnější popis systémů
  - Diskrétní systém
  - Lineární a nelineární
  - Časově invariantní, resp. stacionární systém



# Obsah

- 1 Iterace diferenční rovnice
- 2 Úvod to teorie signálů
  - Základní spojité signály
  - Základní diskrétní signály
- 3 Vnější popis systémů
  - Diskrétní systém
  - Lineární a nelineární
  - Časově invariantní, resp. stacionární systém



# Iterace rovnice ceny

Diferenční rovnici, kterou jsme odvodili

$$c(k) + \frac{C}{D}c(k-1) = \frac{B-A}{D}x(k). \quad (1)$$

přepíšeme do kanonického tvaru

$$y(k) + \gamma y(k-1) = \beta x(k). \quad (2)$$

a postupnými iteracemi nalezneme pro  $x(k) = 1(k)$  a počáteční podmínku  $y(-1) = 0$



# Iterace rovnice ceny

Pro  $k = 0$

$$\begin{aligned}y(0) + \gamma y(-1) &= \beta x(0) \\ y(0) &= \beta - \gamma y(-1) = \beta\end{aligned}$$

Pro  $k = 1$

$$\begin{aligned}y(1) + \gamma y(0) &= \beta x(1) \\ y(1) &= \beta - \gamma y(0) = \beta - \beta\gamma\end{aligned}$$



# Iterace rovnice ceny

Pro  $k = 2$

$$y(2) + \gamma y(1) = \beta x(2)$$

$$y(2) = \beta - \gamma y(1) = \beta - \beta\gamma + \beta\gamma^2$$

Pro  $k$

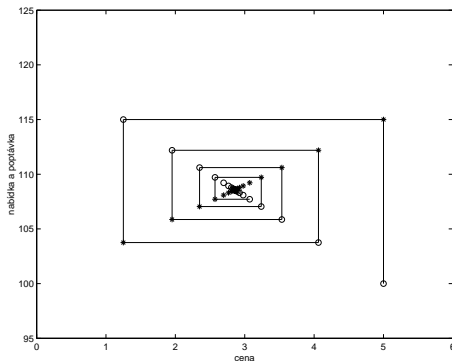
$$y(k) + \gamma y(k-1) = \beta x(k)$$

$$y(k) = \beta - \gamma y(k-1) = \beta(1 - \gamma + \gamma^2) \sum_{m=0}^k (-\gamma)^m$$



# Iterace rovnice ceny

$$y(k) = \beta \sum_{m=0}^k (-\gamma)^m,$$



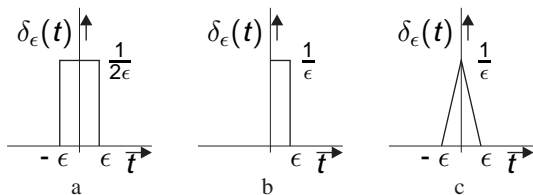
Obrázek: Dosadíme toto řešení do rovnic pro nabídku a poptávku a získáme pavučinkový diagram.





# Jednotkový impuls

Tato funkce je definována na časovém intervalu pro všechna  $t$  a její nenulovou hodnotu předpokládáme pouze v okolí bodu  $t = 0$ . Plocha těchto funkcí je rovna 1 pro každé  $\epsilon > 0$ .



Obrázek: Konečná representace  $\delta_\epsilon(t)$  pro  $\epsilon > 0$ .

Definujme funkci  $\delta(t)$  jako  $\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t)$ .



# Jednotkový impuls

Funkce  $\delta(t)$  se nazývá Diracův impuls, Diracova  $\delta$ -funkce nebo jednotkový impuls. Hodnota  $\delta$ -funkce pro  $t \neq 0$  je  $\delta(t) = 0$ . Její hodnota v  $t = 0$  není definována jako funkce, a proto se používá integrální definice

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(t) dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1 \quad (3)$$

pro každé  $\epsilon > 0$ .



# Jednotkový skok

Funkce jednotkového skoku bývá obvykle značena  $1(t)$  a je definována jako

$$1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \geq 0 \\ 0 & \text{pro } t < 0. \end{cases} \quad (4)$$

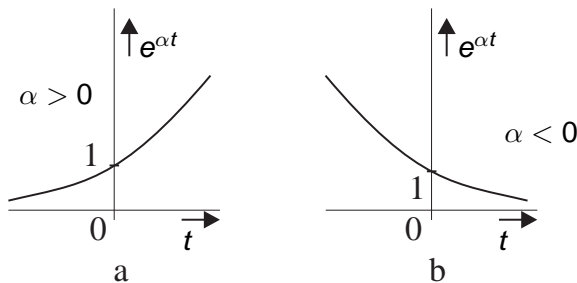


# Reálná exponenciála

Uvažujme exponenciální funkci

$$f(t) = e^{\alpha t}, \quad (5)$$

kde  $\alpha$  je reálná konstanta, podle následujícího obrázku.



Obrázek: Reálná exponenciála a) pro  $\alpha > 0$ , b) pro  $\alpha < 0$ .



# Periodická funkce

O spojitém signálu  $f(t)$  říkáme, že je periodický s periodou  $T_P$ , jestliže platí

$$f(t + T_P) = f(t) \quad (6)$$

pro všechna  $T_P$  a platí

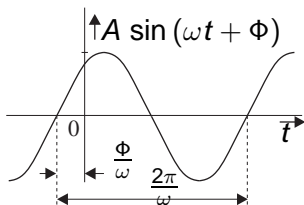
$$f(t) = f(t + T_P) = f(t + 2T_P) = \dots = f(t + kT_P)$$

pro všechna  $k$  celá čísla.



# Sinusová funkce

$$f(t) = A \sin(\omega t + \Phi), \quad (7)$$



Obrázek: Sinusový signál.

Konstanty  $A$ ,  $\omega$  a  $\Phi$  se nazývají amplituda, úhlová frekvence a fázový posuv. Sinusovka je periodická se základní periodou  $T_P = 2\pi/\omega$ .



# Vznik diskrétních signálů

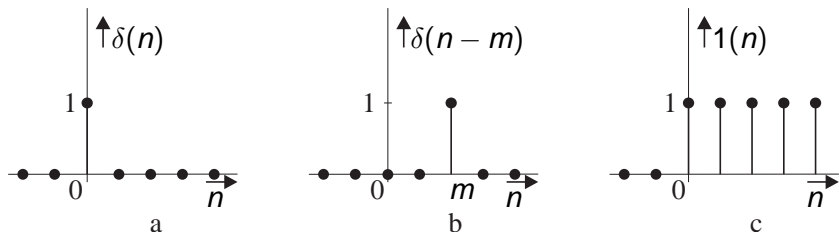
- **přírozeně** např. průměrné denní teploty, denní kurzy, počty studentů
- **vzorkováním spojitých signálů** např. naměření teploty každou hodinu, měření průtoku



# Diskretní jednotkový impuls

Diskretní jednotkový impuls  $\delta(n)$  je definován vztahem

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \\ 0 & \text{pro } n \neq 0. \end{cases} \quad (8)$$



Obrázek: Diskretní signály a) jednotkový impuls, b) posunutý jednotkový impuls, c) jednotkový skok.





# Diskrétní jednotkový skok

Diskrétní jednotkový skok  $1(n)$  je definován vztahem

$$1(n) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \geq 0 \\ 0 & \text{pro } n < 0 \end{cases} \quad (9)$$

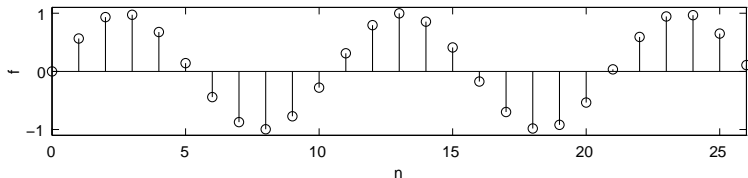


# Diskrétní sinusová posloupnost

Mějme sinusový signál  $f(t) = \sin \omega_0 t$  s periodou  $T_P = 2\pi/\omega_0$ . Pokud tento signál vzorkujeme s periodou  $T > 0$ , získáme diskrétní sinusový signál

$$f(nT) = \sin \omega_0 nT, \quad (10)$$

kde  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Pokud není nutné uvádět periodou  $T$ , píšeme pouze  $f(n)$ .



# Diskrétní sinusová posloupnost

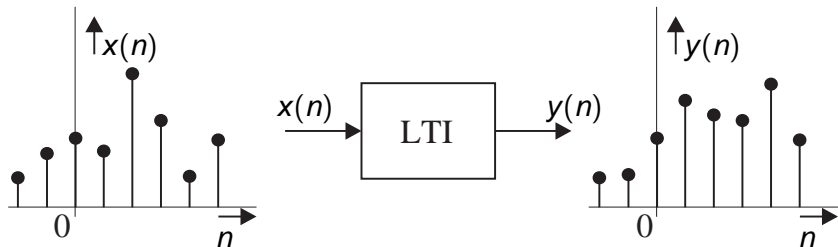
Diskrétní signál  $f(n)$  je periodický, jestliže existuje kladné celé číslo  $N$  takové, že platí

$$f(n) = f(n + N) = f(n + 2N) = \dots = f(n + kN) \quad (11)$$

pro všechna  $n$  z intervalu  $(-\infty, \infty)$  a pro libovolné celé  $k$ .  $N$  se nazývá perioda diskrétního signálu.



# Diskrétní systém



Obrázek: Diskrétní LTI systém



# Diskrétní systém

Odezvu na jednotkový impuls  $\delta(n)$  budeme nazývat **impulsní odezva  $h(n)$**

$$h(n) = \mathcal{S} [\delta(n)] \quad \& \quad h(n, m) = \mathcal{S} [\delta(n - m)] . \quad (12)$$

Odezvu na jednotkový skok  $1(n)$

$$1(n) = \sum_{m=0}^n \delta(n - m) = \delta(n) + \delta(n - 1) + \dots + \delta(1) + \delta(0) , \quad (13)$$

nazveme **přechodovou odezvou  $s(n)$** .



# Diskrétní systém

...a platí

$$\begin{aligned} s(n) &= \mathcal{S}[1(n)] = \mathcal{S}\left[\sum_{m=0}^n \delta(n-m)\right] & (14) \\ &= \sum_{m=0}^n \mathcal{S}[\delta(n-m)] = \sum_{m=0}^n h(n,m). \end{aligned}$$

Postupná úprava rovnice (14) je umožněna právě díky **linearitě systému**, kterou budeme studovat pro obecný vstupní signál

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m). \quad (15)$$



# Lineární systém

Řekli jsme si, že systém není nic jiného, než černá skříňka **black box**, kterou se pokoušíme nejprve identifikovat a poté reprodukovat. Při identifikaci se nejprve ptáme, zda se jedná o systém **lineární**.

Pro vstupní  $x(n)$  a výstupní  $y(n)$  signál pak platí **princip superpozice**

$$\begin{aligned} y(n) &= \mathcal{S}[x(n)] = \mathcal{S}\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\delta(n-m)\right] & (16) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\mathcal{S}[\delta(n-m)] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n,m) \end{aligned}$$



# Příklad lineárního systému $y(n) + ay(n-1) = x(n)$

Kombinací dvou různých vstupních signálů

$$x(n) = a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)$$

$$a_1 [y_1(n) + ay_1(n-1)] = a_1 x_1(n)$$

$$a_2 [y_2(n) + ay_2(n-1)] = a_2 x_2(n)$$

dostanem lineární kombinaci výstupních signálů a pro

$$y(n) = a_1 y_1(n) + a_2 y_2(n) \text{ platí}$$

$$y(n) + ay(n-1) = x(n).$$





# Příklad nelineárního systému

Numerický výpočet odmocniny

$$y(n) = \frac{1}{2} \left[ y(n-1) + \frac{x(n-1)}{y(n-1)} \right]. \quad (17)$$

Odmocnina z čísla 10 je s přesností na 10 desetinných míst rovna  $\sqrt{10} = 3.16227766017$ . Pro  $x(n-1) \equiv x(0) = 10$  dostáváme postupně

$y(1) = 3$	$y^2(1) = 9$
$y(2) = 3.165$	$y^2(2) = 10.017225$
$y(3) = 3.162278$	$y^2(3) = 10.00000214928$
$y(4) = 3.1622776601$	$y^2(3) = 9.999999999568$
$\vdots$	$\vdots$



# Časově invariantní systém

Systém se nazývá **časově invariantní**, jestliže jsou všechny události závislé pouze na časovém intervalu (rozdílu časových událostí)  $n - m$  nikoliv na každém časovém okamžiku  $n$  a  $m$  samostatně.

$$\begin{aligned} \text{dneska} \dots \quad y(n) &= \mathcal{S}[x(n)] \\ \text{včera} \dots \quad y(n-1) &= \mathcal{S}[x(n-1)] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\vdots \quad (19)$$

Potom také rovnice (12) pro impulsní odezvu přejde z maticového tvaru na prostý vektorový zápis

$$h(n, m) \rightarrow h(n - m) = \mathcal{S}[\delta(n - m)] . \quad (20)$$



# Konvoluce

V důsledku časové invariance dostáváme z rovnice (16)

**konvoluční sumu**

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)x(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k), \quad (21)$$

kteřá bývá občas značená

$$y(n) = h(n) * x(n). \quad (22)$$

