Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

13. března 2012

Obsah

Obsah

Obsah

Konvoluce

V důsledku časové invariance dostáváme konvoluční sumu

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m)x(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\,, \qquad (1)$$

která bývá občas značená

$$y(n) = h(n) * x(n)\,. \qquad (2)$$

Příklad časově invariantního systému

Uvažujme mikroekonomický systém variace ceny popsaný diferenční rovnici

$$y(n) + ay(n-1) = x(n)\,. \tag{3}$$

Protože její koeficienty nezávisí na čase, tj. a není funkcí n, zachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n - m$ tvar. Impulsní odezva je potom

$$h(n) = (-a)^n 1(n) \tag{4}$$

Příklad časově proměnného systému

Uvažujme diferenční rovnici

$$y(n) + ny(n-1) = x(n)\,. \tag{5}$$

Protože koeficient u $y(n-1)$ závisí na čase, nezachovává tato rovnice tvar při záměně $n \to n-m$ tvar. Impulsní odezvu lze psát ve tvaru

$$h(n) = (-1)^n n! 1(n) \tag{6}$$

Kauzální systém

Výstupní signál $y(n)$ kauzálního systému závisí pouze na současných a minulých hodnotách vstupního signálu $\{x(n), x(n-1), x(n-2), \ldots\}$ takže v konvoluční sumě (1)

$$
\begin{aligned}
y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \qquad (7)\\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n-k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)
\end{aligned}
$$

musíme položit všechny členy impulsní odezvy $h(k) = 0$ pro $k < 0$.

Kauzální systém

Konvoluční suma pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k)\,. \tag{8}$$

Jestliže navíc budeme požadovat, aby vstupní a výstupní signály měly dobře definovaný počátek, tj. aby $x(n) \neq 0, y(n) \neq 0$ pouze pro $n \geq 0$, potom platí

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)\,. \tag{9}$$

Spojitý systém

V případě spojitého času postupujeme podobně a odvodíme pro lineární časově invariantní systém konvoluční integrál

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\,. \qquad (10)$$

Uvedený integrál opět nazýváme konvolucí a velmi často ho označujeme jako

$$y(t) = h(t) * x(t)\,. \qquad (11)$$

Spojitý systém

Funkce $h(t)$ se nazývá impulsní odezva. Jedná se o výstup systému, na jehož vstupu se uplatní Diracův impuls $x(t) = \delta(t)$. Platí totiž

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = h(t)\,. \tag{12}$$

Kauzální systém

Z důvodů, které klademe na kauzální chování systému je

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{0} h(\tau)x(t-\tau)d\tau + \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \end{aligned} \tag{13}$$

musíme položit hodnoty impulsní odezvy $h(t) = 0$ pro $t < 0$. a Konvoluční integrál pro lineární, časově invariantní a kauzální systém má tvar

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau \,. \tag{14}$$

Lineární a nelineární

Spojitý stavový systém	Diskrétní stavový systém
$\mathbf{u}(t)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(t)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(t)$ ... výstupní vektor	$\mathbf{u}(n)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(n)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(n)$ ... výstupní vektor
Obecný tvar stavových rovnic $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$	Obecný tvar stavových rovnic $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), n)$ $\mathbf{y}(n) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(n), \mathbf{u}(n), n)$

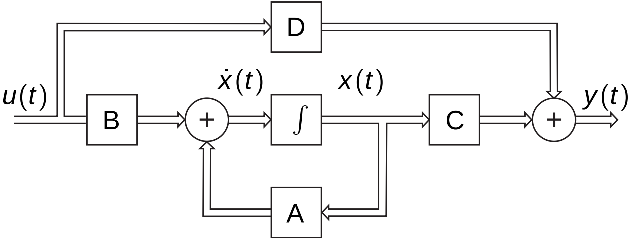
Stacionární a nestacionární

Spojitý stavový systém	**Diskrétní stavový systém**
$\mathbf{u}(t)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(t)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(t)$ ... výstupní vektor	$\mathbf{u}(n)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(n)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(n)$ ... výstupní vektor
Lineární stavový systém $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\,\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{A}(t)$ je matice systému $(n \times n)$ $\mathbf{B}(t)$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$ $\mathbf{C}(t)$ je výstupní matice $(m \times n)$ $\mathbf{D}(t)$ je výstupní matice $(m \times r)$	Lineární stavový systém $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{M}(n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{N}(n)\,\mathbf{u}(n)$ $\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}(n)\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}(n)\mathbf{u}(n)$ $\mathbf{M}(n)$ je matice systému $\mathbf{N}(n)$ je matice vstupů (řízení) $\mathbf{C}(n)$ je výstupní matice $\mathbf{D}(n)$ je výstupní matice

Stacionární a nestacionární

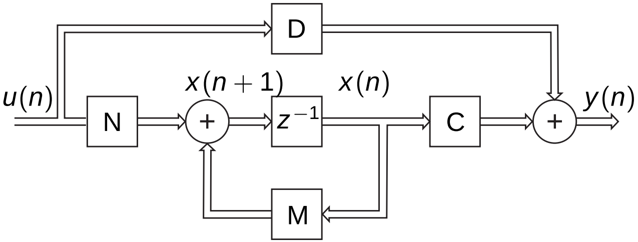
Spojitý stavový systém	**Diskrétní stavový systém**
$\mathbf{u}(t)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(t)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(t)$ ... výstupní vektor	$\mathbf{u}(n)$ ... vstupní (řídící) vektor $\mathbf{x}(n)$ ... stavový vektor $\mathbf{y}(n)$ ... výstupní vektor
Lineární stacionární stavový systém $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$ $\mathbf{A}$ je matice systému $(n \times n)$ $\mathbf{B}$ je matice vstupů (řízení) $(n \times r)$ $\mathbf{C}$ je výstupní matice $(m \times n)$ $\mathbf{D}$ je výstupní matice $(m \times r)$	Lineární stacionární stavový systém $\mathbf{x}(n+1) = \mathbf{M}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{N}\,\mathbf{u}(n)$ $\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n)$ $\mathbf{M}$ je matice systému $\mathbf{N}$ je matice vstupů (řízení) $\mathbf{C}$ je výstupní matice $\mathbf{D}$ je výstupní matice

Vnitřní popis spojitého systému



Obrázek: Blokové schéma spojitého lineárního systému

Vnitřní popis diskrétního systému



Obrázek: Blokové schéma diskrétního lineárního systému

Cykloida

Pohyb po cykloidě je popsán parametrickou soustavou rovnic

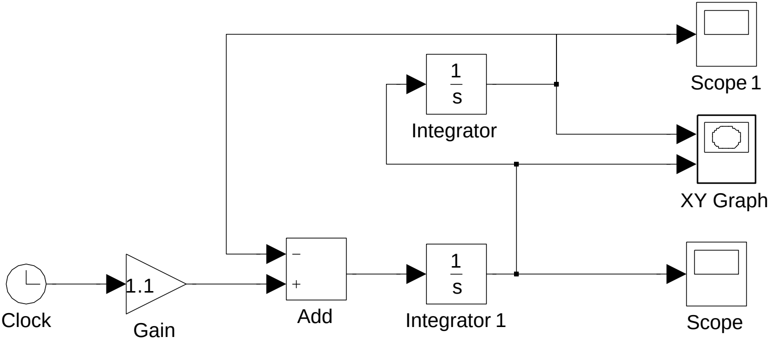
$$\begin{aligned} x_1(t) \equiv x &= at - b\sin t\,, \\ x_2(t) \equiv y &= a - b\cos t\,, \end{aligned}$$

která je pro počáteční podmínky

$$x_1(0) = 0 \quad \text{a} \quad x_2(0) = a - b$$

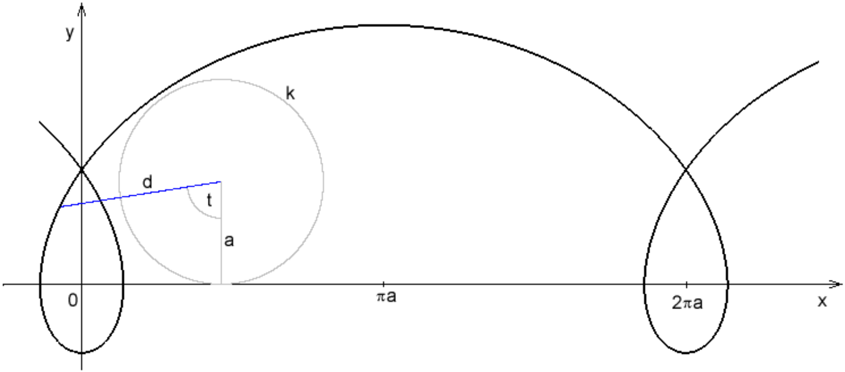
dána řešením stavové rovnice

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} t\,.$$



Obrázek: Model cykloidy

Cykloida



Obrázek: Graf cykloidy

Vlci a ovečky

Nelineární stavový model vlci a ovečky, který je znám v literatuře jako Lotka - Volterra predator-prey model, se týká populace ovcí popsané stavovou proměnnou $x_1(t)$ a populace vlků popsané stavovou proměnnou $x_2(t)$.

Dynamický model je dán nelineární soustavou stavových rovnic

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) &= a\,x_1(t) - b\,x_1(t)x_2(t), \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -c\,x_2(t) + d\,x_1(t)x_2(t). \end{aligned}$$

Vlci a ovečky

Uvedený model můžeme snadno interpretovat. Žijí-li ovce a vlci odděleně, pro ovce platí rovnice

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a\,x_1(t),$$

jejímž řešením je exponenciální růst

$$x_1(t) = x_1(0)\,e^{at},$$

zatímco vlci bez potravy

$$\frac{d}{dt}x_2(t) = -c\,x_2(t)$$

exponenciálně hynou,

$$x_2(t) = x_2(0)\,e^{-ct}.$$

Vlci a ovečky

Počet sežraných ovcí a nasycených vlků je úměrný počtu jejich setkání, tj. součinu

$$x_1(t)x_2(t)$$

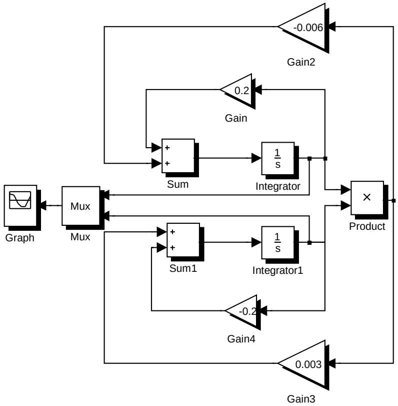
a počet ovcí klesá úměrně s

$$-b\, x_1(t)x_2(t),$$

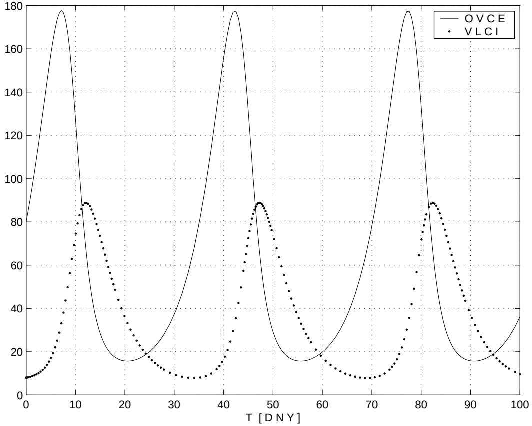
zatímco se vlci mají dobře a jejich počet stoupá úměrně s

$$d\, x_1(t)x_2(t).$$

Vnitřní popis diskrétního systému



Vnitřní popis diskrétního systému



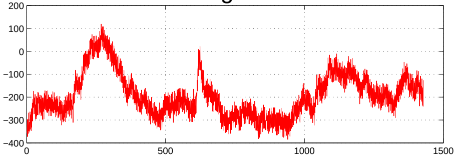
Obrázek: Průběh populací vlků a oveček

MSaP - domácí úkol č. DU-1

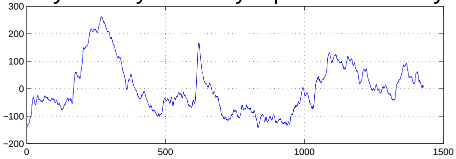
zadání 13. a 14. 3. 2012 odevzdání 20. resp. 21. 3. 2012

Problém 1

Původní signál EEG



Signál EEG vyhlazený klouzavým průměrem délky 5



Problém 1

Na obrázku je uveden příklad použití klouzavého průměru. Klouzavý průměr je nejpoužívanější metoda analýzy dat. Vyhlazuje prudké výkyvy. Jednoduchý klouzavý průměr $y(n)$ z naměřených dat $x(n)$ v pěti následujících obdobích má tvar

$$y(n) = \frac{1}{5}\left(x(n) + x(n-1) + x(n-2) + x(n-3) + x(n-4)\right).$$

Vaším úkolem je:

- Napočítat klouzavý průměr $y(n)$ délky 5 pro prvních **deset členů** jednotkového skoku $x(n) \equiv \mathbf{1}(n)$.
- Nakreslit průběh jednotkového skoku a odpovídajícího klouzavého průměru.
- Určit jaký tvar bude mít vzorec pro klouzavý průměr délky ℓ.

Problém 2

Dynamický systém je popsán diferenciální rovnicí tvaru

$$\ddot{y}(t) + \alpha_0^2(1 + \sin \omega_0 t)\, y(t) = \cos \Omega t.$$

Určete zda uvedený systém je

- spojitý/nespojitý
- autonomní/neautonomní
- lineární/nelineární
- časově invariantní/ časově proměnný