Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

14. března 2013

Obsah

Obsah

Obsah

Obsah

Systém druhého řádu

Diferenční rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(n+2) + \alpha_1 y(n+1) + \alpha_0 y(n) = u(n) \qquad (1)$$

$$y(0) = \gamma_1 \quad \text{a} \quad y(1) = \gamma_2, \qquad (2)$$

udává vztah vstupu $u(n)$ a výstupu $y(n)$ diskrétního LTI systému

Systém druhého řádu

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$\begin{aligned} x_1(n) &= y(n)\,, \\ x_2(n) &= y(n+1)\,. \end{aligned}$$

Systém druhého řádu

Dosadíme za $y(n+1) = x_2(n)$ a $y(n+2) = x_2(n+1)$ do původní diferenční rovnice a je

$$x_2(n+1) = -\alpha_1 x_2(n) - \alpha_0 x_1(n) + u(n)\,. \tag{3}$$

Současně platí

$$x_1(n+1) = y(n+1) = x_2(n)\,. \tag{4}$$

Systém druhého řádu

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1)) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(n) \qquad (5)$$

nebo

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1)) \\ x_2(n+1) \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + \mathbf{N}\, u(n), \qquad (6)$$

resp.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Systém druhého řádu

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} + 0\, u(n)\,. \tag{7}$$

Matice **D** je tedy nulová a pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{8}$$

Lineární systém, který má matici **D** nulovou, se nazývá ryzí systém. Je vhodné podotknout, že počáteční podmínky se transformují do stavového popisu takto

$$y(0) = \gamma_1 = x_1(0) \quad \text{a} \quad y(1) = \gamma_2 = x_2(0).$$

Systém druhého řádu

... podobně diferencální rovnice druhého řádu s počátečními podmínkami ve tvaru

$$\ddot{y}(t) + a_1\dot{y}(t) + a_0 y(t) = u(t) \tag{9}$$

$$y(t)|_{t=0+} = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(t)|_{t=0+} = c_2, \tag{10}$$

udává vztah vstupu $u(t)$ a výstupu $y(t)$ spojitého LTI systému

Systém druhého řádu

Tento vnější popis převedeme na stavový popis volbou stavového vektoru

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t)\,, \\ x_2(t) &= \dot{y}(t)\,. \end{aligned}$$

Systém druhého řádu

Použijeme $\dot{y}(t) = x_2(t)$ a je $\ddot{y}(t) = \dot{x}_2(t)$, Tento vztah dosadíme do původní diferenciální rovnice a je

$$\dot{x}_2(t) = -a_1\, x_2(t) - a0\, x_1(t) + u(t)\,. \tag{11}$$

Současně platí

$$\dot{x}_1(t) = \dot{y}(t) = x_2(t)\,. \tag{12}$$

Systém druhého řádu

Dostáváme tak

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \qquad (13)$$

nebo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{B}\, u(t), \qquad (14)$$

resp.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Systém druhého řádu

Rovnici pro výstup vyjádříme z definice stavových veličin

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + 0\, u(t)\,. \tag{15}$$

Matice **D** je tedy nulová a pro výstupní matici dostáváme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\,. \tag{16}$$

Počáteční podmínky se transformují do stavového popisu takto

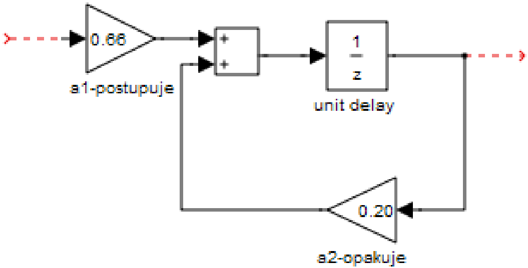
$$y(t)|_{t=0+} = c_1 = x_1(t)|_{t=0+} \quad \text{a} \quad \dot{y}(t)|_{t=0+} = c_2 = x_2(t)|_{t=0+}$$

Model fakulta

Příklad 3 Vznik nové fakulty a hledání odpovědí na různé otázky související s počty studentů jsou ukázkou diskrétního stavového systému, ve kterém složka stavového vektoru x_i reprezentuje počet studentů v i-tém ročníku. Předpokládejme dále, že do prvního ročníku budeme přijímat pravidelně každý rok $u(n)$ studentů.

- Jestliže z každého ročníku postoupí bez potíží $a_1 x_i$ studentů, opakuje $a_2 x_i$ studentů a fakultu opustí $a_3 x_i$ studentů, kde $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, nalezněte počty absolventů, pokud úspěšnost u státních závěrečných zkoušek je a, pro které platí $a \equiv a_1^{(5)}$.
- Nalezněte celkový počet studentů, kteří studují v jednom akademickém roce na fakultě.

Model fakulta



Obrázek: Model jednotlivého ročníku.

Model fakulta

Stavový popis této vzorové situace je

$$\begin{bmatrix} x_1(n+1) \\ x_2(n+1) \\ x_3(n+1) \\ x_4(n+1) \\ x_5(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1^{(1)} & a_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{(2)} & a_2^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^{(3)} & a_2^{(4)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1^{(4)} & a_2^{(5)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(n)$$

$$y(n) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{bmatrix} .$$

Model fakulta

Nebo se můžeme ptát, jaký je celkový počet studentů na fakultě v určitém roce. Potom pro výstup obdržíme

$$y(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \\ x_4(n) \\ x_5(n) \end{bmatrix} .$$

Vztah mezi diskrétním a spojitým popisem

Spojitý systém popsaný stavovými rovnicemi

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t), \tag{17}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t), \tag{18}$$

můžeme převést na ekvivalentní diskrétní systém tak, že čas t nahradíme diskrétními časovými okamžiky $t = nT$, kde T je vzdálenost mezi následujícími časovými okamžiky.

Vztah mezi diskrétním a spojitým popisem

Všechny veličiny měříme pouze v čase $t = nT$ a proto

$$x(t) = x(nT) \equiv x(n),$$

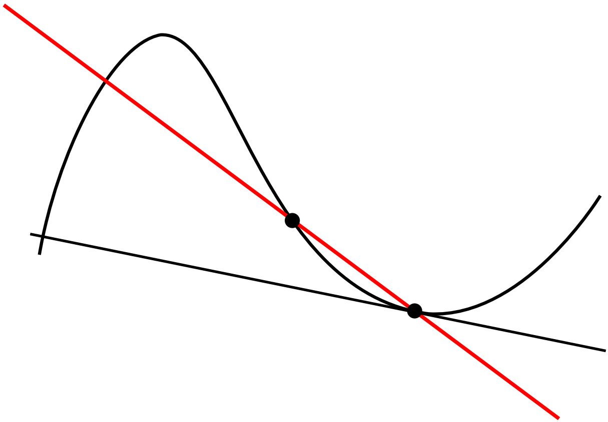
$$y(t) = y(nT) \equiv y(n),$$

$$u(t) = u(nT) \equiv u(n).$$

Derivaci stavu $\dot{x}(t)$ nahradíme v prvním přiblížení první diferencí

$$\dot{\mathbf{x}}(t) \approx \frac{\mathbf{x}((n+1)T) - \mathbf{x}(nT)}{T} = \frac{1}{T}(\mathbf{x}(n+1) - \mathbf{x}(n))$$

Vztah mezi diskrétním a spojitým popisem



Obrázek: Tečna (spojitý systém) a sečna (diskrétní systém) v bodě křivky

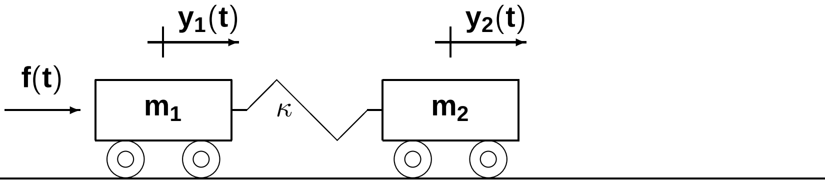
Vztah mezi diskrétním a spojitým popisem

Dosazením dostaneme po úpravě diskrétní tvar stavových rovnic

$$\mathbf{x}(n+1) = (\mathbf{1} + T\,\mathbf{A})\,\mathbf{x}(n) + T\,\mathbf{B}\,\mathbf{u}(n) \tag{19}$$

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(n) + \mathbf{D}\mathbf{u}(n) \tag{20}$$

Příklad 4 Dva vozíky s hmotností m_1 a m_2 jsou spojeny pružinou, která má koeficient pružnosti κ.



Podle obrázku působí na první vozík hnací síla $f(t)$.

Polohy vozíků jsou $y_1(t)$ a $y_2(t)$, takže při zanedbání tření mají pohybové rovnice tvar

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1(t) &= f(t) + \kappa\,(y_2(t) - y_1(t))\,, \\ m_2 \ddot{y}_2(t) &= -\kappa\,(y_2(t) - y_1(t))\,. \end{aligned}$$

Máme sestavit stavové rovnice pro systém dvou vozíků.

Položíme

$$x_1(t) = y_1(t)\,, \qquad x_2(t) = y_2(t)\,,$$
$$x_3(t) = \dot{y}_1(t)\,, \qquad x_4(t) = \dot{y}_2(t)$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) \equiv \dot{y}_1(t) &= x_3(t)\,,\\
\dot{x}_2(t) \equiv \dot{y}_2(t) &= x_4(t)\,,\\
\dot{x}_3(t) \equiv \ddot{y}_1(t) &= \frac{\kappa}{m_1}\left(x_2(t) - x_1(t)\right) + \frac{1}{m_1} f(t)\\
\dot{x}_4(t) \equiv \ddot{y}_2(t) &= -\frac{\kappa}{m_2}\left(x_2(t) - x_1(t)\right)
\end{aligned}$$

kterou již snadno převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{\kappa}{m_1} & \dfrac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{\kappa}{m_2} & -\dfrac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} f(t) \tag{21}$$

a

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} . \qquad (22)$$

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\dfrac{\kappa}{m_1} & \dfrac{\kappa}{m_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{\kappa}{m_2} & -\dfrac{\kappa}{m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{1}{m_1} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$