Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

21. března 2013

Obsah

Obsah

Obsah

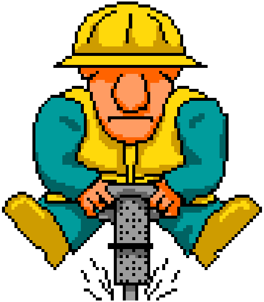
Obsah

Model fakulta - prémiový úkol číslo 1

Na základě výročních zpráv o činnosti Fakulty dopravní ČVUT z let 2006 - 2011, které naleznete na stránkách http://www.fd.cvut.cz/strucne-o-fakulte/vyrocni-zpravy.html , sestavte model 4-letého bakalářského a 2-letého magisterského studia, který zahájilo v akademickém roce 2004/2005. Stavový model nastavte tak, aby odpovídal počtu studentů zapsaných do všech ročníků, jak je naleznete ve zprávách o činnosti. Model sestavte v SIMULINKu a prokažte shodu výsledků vašeho modelu s údaji uvednými v těchto zprávách.

Prémiový úkol číslo 1

Prvních pět úspěšných řešitelů obdrží za správné řešení 2 body započítávané ke zkoušce. Konec soutěže je 28. března t.r.



Důvody pro použití Laplaceovy transformace

Laplaceova transformace významně zjednodušuje některé operace, např.

- derivace $\Rightarrow$ násobení proměnnou p
- integrace $\Rightarrow$ dělení proměnnou p
- diferencíalní rovnice n-tého řádu s konstantními koeficienty $\Rightarrow$ algebraické rovnice n-tého řádu
- konvoluce $f(t) * g(t) \Rightarrow$ násobení $F(p)G(p)$

Laplaceova transformace - definice

Laplaceova transformace funkce $f(t)$, která je nanejvýš polynomiálního růstu

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_n t^n$$

je definována integrálem

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \equiv \mathcal{L}\left[f(t)\right].$$

Funkci $f(t)$ nazýváme vzorem a funkci $F(p)$ Laplaceovým obrazem.

Laplaceova transformace - definice

Zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině p

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p) e^{pt} dp \equiv \mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right].$$

Praktické počítání zpětné Laplaceovy transformace vychází z residuové věty, která pro racionálně lomené funkce v proměnné p vede v operátorovém počtu na Heavisideovu větu [1].

[1] Oliver Heaviside 1850-1925

Laplaceova transformace - vlastnosti

- Laplaceova transformace je lineární

$$\mathcal{L}\left[\sum_k a_k f_k(t)\right] = \sum_k a_k \mathcal{L}\left[f_k(t)\right] = \sum_k a_k F_k(p)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_m b_m F_m(p)\right] = \sum_m b_m \mathcal{L}^{-1}\left[F_m(p)\right] = \sum_m b_m f_m(t)$$

Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o změně měřítka

$$F(p) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right) = \mathcal{L}\left[f(at)\right]$$

Důkaz: substitucí $at = \tau$

$$\mathcal{L}\left[f(at)\right] = \int\limits_0^\infty f(at)e^{-pt}dt = \int\limits_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{a}\tau}\frac{1}{a}d\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$$

QED[2]

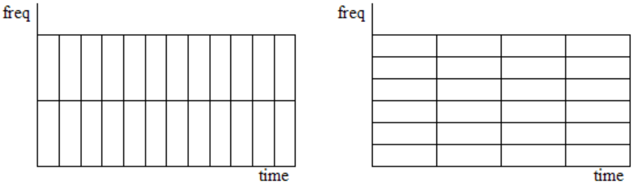
[2]Quod erat demonstrandum - závěrečná formule důkazu Eukleidových

Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o změně měřítka

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(p)\right] \qquad \frac{1}{b} f\left(\frac{t}{b}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(bp)\right]$$

Všechny integrální transformace (Laplace, Fourier, Wavelets) podléhají Hesienbergově principu neurčitosti.



Obrázek: Časově-kmitočtové rozlišení

Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o posunutí

$$\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] = e^{-p\tau}\mathcal{L}\left[f(t)\right]$$

Důkaz: substitucí $t-\tau=\vartheta$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f(t-\tau)\right] &= \int_0^\infty f(t-\tau)e^{-pt}dt = \int_{-\tau}^\infty f(\vartheta)e^{-p(\tau+\vartheta)}d\vartheta \\
&= e^{-p\tau}\int_{-\tau}^{-0} f(\vartheta)e^{-p\vartheta}d\vartheta + e^{-p\tau}\int_0^\infty f(\vartheta)e^{-p\vartheta}d\vartheta \\
&= e^{-p\tau}\int_0^\infty f(\vartheta)e^{-p\vartheta}d\vartheta \equiv e^{-p\tau}F(p)
\end{aligned}$$

QED

Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o konvoluci

$$\mathcal{L}\left[f(t) * g(t)\right] \equiv \mathcal{L}\left[\int\limits_{0}^{\infty} f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right] = F(p)G(p)$$

Důkaz: se snáze provádí v diskrétním čase

Důsledek

$$\mathcal{L}\left[y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right] \Leftrightarrow Y(p) = H(p)X(p)$$

Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o obrazu derivace funkce

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[f(t)\right] &= F(p)\\
\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] &= pF(p) - f(0+)\\
\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] &= p^2F(p) - pf(0+) - f'(0+)\\
&\vdots\\
\mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right] &= p^nF(p) - p^{n-1}f(0+) - p^{n-2}f'(0+)\ldots - f^{(n-1)}(0+)
\end{aligned}
$$

Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o obrazu derivace funkce

Důkaz: integrováním per partés

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}f(t)\right] &= \int_0^{\infty} \frac{d}{dt}f(t)e^{-pt}dt \\
&= \left[f(t)e^{-pt}\right]_{0+}^{\infty} - (-p)\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt \\
&= -f(0+) + pF(p).
\end{aligned}$$

Opakováním tohoto procesu získáme postupně

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right] = p^2F(p) - pf(0+) - f'(0+)$$

QED

Laplaceova transformace - vlastnosti

- Věta o obrazu integrálu funkce

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{p}F(p)$$

Důkaz: integrováním per partés

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) e^{-pt}dt \\
&= \frac{1}{-p}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau e^{-pt}\right]_0^\infty - \frac{1}{-p}\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \\
&= \frac{1}{p}F(p).
\end{aligned}$$

Laplaceova transformace - tabulky

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$
$f(t) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt}dp$	$F(p) = \displaystyle\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\dfrac{1}{p}$

Laplaceova transformace - tabulky

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$
$\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$

Laplaceova transformace - tabulky

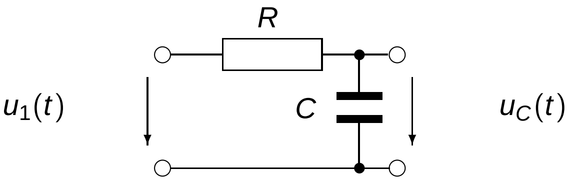
$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$
$e^{-\alpha t}\sin \omega t$	$\dfrac{\omega}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
$e^{-\alpha t}\cos \omega t$	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\omega^2}$
t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$

Laplaceova transformace - tabulky

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$	$F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$
$t^n e^{-\alpha t}$	$\dfrac{n!}{(p+\alpha)^{n+1}}$
$t \cos \omega t$	$\dfrac{p^2 - \omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$
$t \sin \omega t$	$\dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$

Laplaceova transformace - příklad 1

Integrační RC článek



Diferenciální rovnici jsme si již odvodili

$$RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = u_1(t).$$

Laplaceova transformace - příklad 1

Pro $\alpha = \dfrac{1}{RC}$ a vstupní $u_1(t) = U_0\mathbf{1}(t)$ je

$$\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \alpha U_0 \mathbf{1}(t).$$

Protože je to diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, můžeme použít Laplaceovu transformaci a její vlastnosti

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy(t)}{dt} + \alpha y(t) = \alpha U_0 \mathbf{1}(t)\right\},$$

a obdržíme algebraickou rovnici pro neznámou $Y(p)$

$$pY(p) - y(0) + \alpha Y(p) = \alpha U_0 \frac{1}{p}.$$

Laplaceova transformace - příklad 1

Rovnici upravíme tak, že neznámá bude na levé straně a všechny známé konstanty na straně pravé

$$(p+\alpha)Y(p) = \alpha U_0 \frac{1}{p} + y(0).$$

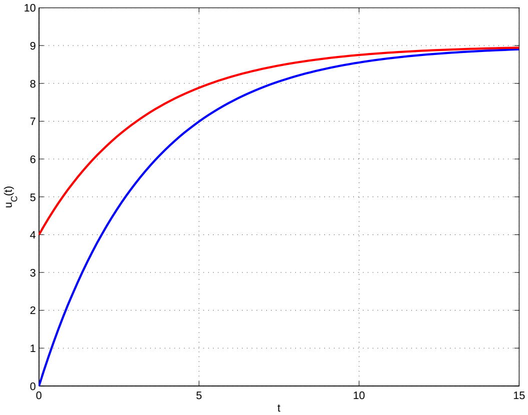
a nalezneme řešení v rovině p

$$Y(p) = \frac{\alpha U_0}{p(p+\alpha)} + \frac{y(0)}{p+\alpha} = \frac{U_0}{p} - \frac{U_0}{p+\alpha} + \frac{y(0)}{p+\alpha}$$

S pomocí tabulek pak můžeme nalézt pro $t > 0$ řešení

$$y(t) = U_0(1 - e^{-\alpha t}) + y(0)e^{-\alpha t}$$

Laplaceova transformace - příklad 1



Obrázek: Průběh nabíjení v závislosti na hodnotě počátečního stavu, tedy zbytkového napětí $y(0) = 0V$ a $y(0) = 4V$

Laplaceova transformace - příklad 2

Uvažujte LTI systém, který je pro $t > 0$ popsán naměřenými hodnotami vstupu $x(t) = e^{-t} + e^{-3t}$ a výstupu $y(t) = te^{-3t}$. Jak nalezneme impulsní odezvu?

Laplaceova transformace - příklad 2

Protože platí

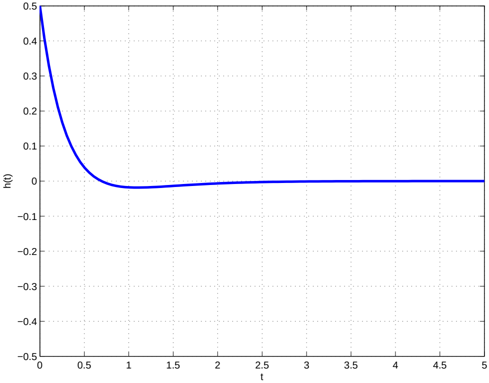
$$
\begin{aligned}
X(p) &= \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+3} = 2\frac{p+2}{(p+1)(p+3)} \\
Y(p) &= \frac{1}{(p+3)^2}
\end{aligned}
$$

a protože $Y(p) = H(p)X(p)$ je

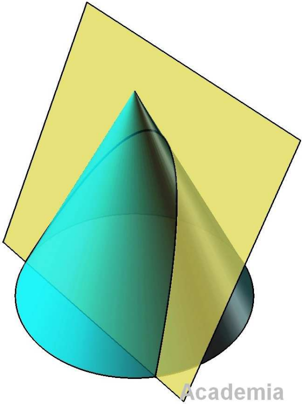
$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{2}\frac{p+1}{(p+2)(p+3)} = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{p+3} - \frac{1}{p+2}\right].$$

Laplaceova transformace - příklad 2

S pomocí tabulek pak můžeme nalézt pro $t > 0$ řešení
$h(t) = e^{-3t} - \frac{1}{2}e^{-2t}.$



Přeji hezký jarní den



Převzato z Š. Voráčová: Atlas geometrie, Nakladatelství Academia, 2012