

Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

28. března 2013



Obsah

- 1 Zpětná Laplaceova transformace-definice
- 2 Zpětná Laplaceova transformace
- 3 Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly
- 4 Příklad použití zpětné Laplaceovy transformace



Obsah

- 1 Zpětná Laplaceova transformace-definice
- 2 Zpětná Laplaceova transformace
- 3 Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly
- 4 Příklad použití zpětné Laplaceovy transformace



Obsah

- 1 Zpětná Laplaceova transformace-definice
- 2 Zpětná Laplaceova transformace
- 3 Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly
- 4 Příklad použití zpětné Laplaceovy transformace



Obsah

- 1 Zpětná Laplaceova transformace-definice
- 2 Zpětná Laplaceova transformace
- 3 Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly
- 4 Příklad použití zpětné Laplaceovy transformace



Zpětná Laplaceova transformace-definice

Již jsme si řekli, zpětná Laplaceova transformace má tvar integrálu podél křivky v komplexní rovině p

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt} dp \equiv \mathcal{L}^{-1} [F(p)].$$

Pro **racionální lomené funkce v proměnné p** budeme postupovat jinak.



Jak na to?

$f(t) \Rightarrow$	$\Leftarrow F(p)$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p + \alpha}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$ $= \frac{e^{-(\alpha - i\omega)t} + e^{-(\alpha + i\omega)t}}{2}$	$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p + \alpha - i\omega} + \frac{1}{p + \alpha + i\omega} \right)$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$ $= \frac{e^{-(\alpha - i\omega)t} - e^{-(\alpha + i\omega)t}}{2i}$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$ $= \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p + \alpha - i\omega} - \frac{1}{p + \alpha + i\omega} \right)$



Zpětná Laplaceova transformace

O racionální lomené funkci $\frac{Q(p)}{N(p)}$ říkáme, že má **nulové** body $p_{0\nu}$, jestliže $Q(p_{0\nu}) = 0$ a že má **póly** $p_{\infty\mu}$, jestliže $N(p_{\infty\mu}) = 0$.

Pokud má funkce $\frac{Q(p)}{N(p)}$ jednoduché póly, potom

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^n (p - p_{\infty\mu}) = (p - p_{\infty 1})(p - p_{\infty 2}) \dots (p - p_{\infty n}).$$



Zpětná Laplaceova transformace

Příklad a) Jestliže

$$N(p) = p^3 + 3p^2 + 6p + 4 = (p + 1)(p^2 + 2p + 4)$$

určete rozklad na kořenové činitele.

Je samozřejmé

$$N(p) = (p + 1)(p^2 + 2p + 4) = (p + 1)(p + 1 + i\sqrt{3})(p + 1 - i\sqrt{3})$$

takže platí

$$N(p) = \prod_{\mu=1}^3 (p - p_{\mu}) = (p - p_1)(p - p_2)(p - p_3).$$



Zpětná Laplaceova transformace

Póly v tomto případě jsou

$$p_1 = -1$$

$$p_2 = -1 - i\sqrt{3}$$

$$p_3 = -1 + i\sqrt{3}$$

a platí $N(p_1) \equiv N(-1) = 0$ atd.

Z tohoto příkladu plyne první krok, který musíme při zpětné Laplaceově transformaci provést: **nalezení kořenů polynomu ve jmenovateli racionální funkce $N(p)$**



Zpětná Laplaceova transformace

Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky má tvar

$$\begin{aligned}
 \frac{Q(p)}{N(p)} &= \sum_{\mu=1}^n \frac{k_{\mu}}{p - p_{\infty\mu}} \\
 &= \frac{k_1}{p - p_{\infty 1}} + \frac{k_2}{p - p_{\infty 2}} + \cdots + \frac{k_n}{p - p_{\infty n}} \\
 &\equiv \frac{k_1}{p - p_1} + \frac{k_2}{p - p_2} + \cdots + \frac{k_n}{p - p_n},
 \end{aligned}$$

kde k_{μ} se nazývají residua...



Zpětná Laplaceova transformace

... a platí

$$\begin{aligned}k_{\mu} &= \lim_{p \rightarrow p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{Q(p)}{N(p)} \\&= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \rightarrow p_{\infty\mu}} (p - p_{\infty\mu}) \frac{1}{N(p)} \\&= Q(p_{\infty\mu}) \lim_{p \rightarrow p_{\infty\mu}} \frac{1}{\frac{N(p)}{p - p_{\infty\mu}}} \\&= Q(p_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(p_{\infty\mu})}\end{aligned}$$



Zpětná Laplaceova transformace

Pro jednoduchost budeme dále psát $p_{\infty\mu} \rightarrow p_\mu$. Protože platí

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{p - \alpha} \right] = e^{\alpha t},$$

dostaneme

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{Q(p)}{N(p)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{\mu=1}^n \frac{k_\mu}{p - p_\mu} \right] = \sum_{\mu=1}^n k_\mu e^{p_\mu t}.$$



Zpětná Laplaceova transformace

Tím jsme dokázali tzv. **Heavisideův vzorec** pro zpětnou transformaci racionální lomené funkce s jednoduchými póly

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{Q(p)}{N(p)} \right] = \sum_{\mu} \frac{Q(p_{\mu})}{N'(p_{\mu})} e^{p_{\mu} t}$$



Zpětná Laplaceova transformace - jak na to?

Jestliže $N(p) = (p - p_1)^{\beta_1} (p - p_2)^{\beta_2} \dots (p - p_n)^{\beta_n}$ má násobné kořeny s násobností β_i , musíme předchozí postup modifikovat, protože platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L} [e^{-\alpha t}] &= \frac{1}{p + \alpha} \\ \mathcal{L} [te^{-\alpha t}] &= \frac{1!}{(p + \alpha)^2} \\ \mathcal{L} [t^2 e^{-\alpha t}] &= \frac{2!}{(p + \alpha)^3} \\ &\vdots \\ \mathcal{L} [t^n e^{-\alpha t}] &= \frac{n!}{(p + \alpha)^{n+1}} \end{aligned}$$



Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Je zřejmé, že v inverzní transformaci hrají výsadní roli póly racionální lomené funkce. Proto se v dalším můžeme zabývat pouze takovými racionálně lomenými funkcemi, jejichž čitatel je jednotkový

$$H(p) = \frac{1}{N(p)}.$$

Jestliže tedy

$$N(p) = (p - p_1)^{\beta_1} (p - p_2)^{\beta_2} \dots (p - p_n)^{\beta_n}$$

má násobné kořeny, potom inverzní Laplaceova transformace má tvar...



Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{N(p)} \right] &= e^{p_1 t} \left[k_1^{(1)} + k_1^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots + k_1^{(\beta_1)} \frac{t^{\beta_1-1}}{(\beta_1-1)!} \right] \\
 &+ e^{p_2 t} \left[k_2^{(1)} + k_2^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots + k_2^{(\beta_2)} \frac{t^{\beta_2-1}}{(\beta_2-1)!} \right] \\
 &\vdots \\
 &+ e^{p_n t} \left[k_n^{(1)} + k_n^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots + k_n^{(\beta_n)} \frac{t^{\beta_n-1}}{(\beta_n-1)!} \right]
 \end{aligned}$$



Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Koeficienty $k_{\mu}^{(\beta_m)}$ můžeme získat následujícím postupem.

Nechť například

$$N(p) = (p - 2)^2(p + 5)(p + 7).$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{(p - 2)^2(p + 5)(p + 7)} = \frac{k_1^{(2)}}{(p - 2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p - 2} + \frac{k_2}{p + 5} + \frac{k_3}{p + 7}$$



Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Vynásobíme rovnici členem $(p - 2)^2$

$$\frac{(p - 2)^2}{(p - 2)^2(p + 5)(p + 7)} = k_1^{(2)} + k_1^{(1)}(p - 2) + \frac{k_2(p - 2)^2}{p + 5} + \frac{k_3(p - 2)^2}{p + 7}$$

a nalezneme limitu pro $p \rightarrow 2$,

$$\frac{1}{(2 + 5)(2 + 7)} = k_1^{(2)}$$



Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Odečteme-li výraz $\frac{1}{63(p-2)^2}$ od obou stran původní rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} - \frac{1}{63(p-2)^2} \\ = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7} \end{aligned}$$

resp. rovnici

$$\frac{1}{63} \left[\frac{-(p+14)}{(p-2)(p+5)(p+7)} \right] = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7},$$



Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

pro kterou se výpočet k_μ redukuje na případ s jednoduchými póly a platí

$$k_1^{(1)} = -\frac{2^4}{7^2 \times 9^2},$$
$$k_2 = \frac{1}{2 \times 7^2},$$
$$k_3 = -\frac{1}{2 \times 9^2}.$$



Laplaceova transformace - příklad 1

Příklad 1

Uvažujme lineární spojité systém, který je posaný diferenciální rovnicí

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 5u(t),$$

kde $u(t) = 1(t)$ je jednotkový skok a počáteční stav systému je dán stavem výstupu a rychlosti v čase $t = 0$, tj. $y(0) = -1$ a $\dot{y}(0) = 2$.

Máme nalézt řešení $y(t)$.



Laplaceova transformace - příklad 1

Po Laplaceově transformaci diferenciální rovnice dostaneme algebraickou rovnici

$$p^2 Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 3pY(p) - 3y(0) + 2Y(p) = \frac{5}{p}.$$

S použitím počátečních podmínek nalezneme řešení algebraické rovnice ve tvaru

$$Y(p) = \frac{5 - p - p^2}{p(p+1)(p+2)}.$$



Laplaceova transformace - příklad 1

Rozložíme racionální lomenou funkci na parciální zlomky

$$Y(p) = \frac{5}{2p} - \frac{5}{p+1} + \frac{3}{2(p+2)}.$$

Hledané řešení je pro $t \geq 0$

$$y(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}.$$

První člen odpovídá ustálenému stavu, další dva členy popisují přechodový děj.



Domácí úkol

Příklad a

Diferenciální rovnici

$$\ddot{y}(t) + a_2 \dot{y}(t) + a_1 y(t) = u(t) \quad (1)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 2, \quad \ddot{y}(0) = 0, \quad (2)$$

transformujte pomocí Laplaceovy transformace na algebraický tvar. Předpokládejte, že $u(t) = \delta(t)$ a určete tvar algebraického řešení pro $Y(p)$.



Domácí úkol

Příklad b), c)

- Nalezněte Laplaceův obraz funkce

$$f(t) = t \cos(\omega t).$$

- Jestliže víme, že Laplaceův obraz jednotkového skoku je $\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t)\} = \frac{1}{p}$, jaký je obraz posunutého jednotkového skoku $\mathcal{L}\{\mathbf{1}(t - \tau)\} =$?



