

Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

10. dubna 2012



Obsah

- 1 Zpětná Laplaceova transformace
- 2 Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu
- 3 Zpětná Laplaceova transformace - příklady



Obsah

- 1 Zpětná Laplaceova transformace
- 2 Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu
- 3 Zpětná Laplaceova transformace - příklady



Obsah

- 1 Zpětná Laplaceova transformace
- 2 Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu
- 3 Zpětná Laplaceova transformace - příklady



Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Je zřejmé, že v inverzní transformaci hrají výsadní roli póly racionální lomené funkce. Proto se v dalším můžeme zabývat pouze takovými racionálně lomenými funkcemi, jejichž čítenel je jednotkový

$$H(p) = \frac{1}{N(p)}.$$

Jestliže tedy

$$N(p) = (p - p_1)^{\beta_1} (p - p_2)^{\beta_2} \dots (p - p_n)^{\beta_n}$$

má násobné kořeny, potom inverzní Laplaceova transformace má tvar...



Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{N(p)}\right] &= e^{p_1 t} \left[k_1^{(1)} + k_1^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots + k_1^{(\beta_1)} \frac{t^{\beta_1-1}}{(\beta_1-1)!} \right] \\ &+ e^{p_2 t} \left[k_2^{(1)} + k_2^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots + k_2^{(\beta_2)} \frac{t^{\beta_2-1}}{(\beta_2-1)!} \right] \\ &\vdots \\ &+ e^{p_n t} \left[k_n^{(1)} + k_n^{(2)} \frac{t}{1!} + \dots + k_n^{(\beta_n)} \frac{t^{\beta_n-1}}{(\beta_n-1)!} \right]\end{aligned}$$



Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Koeficienty $k_{\mu}^{(\beta_m)}$ můžeme získat následujícím postupem.

Nechť například

$$N(p) = (p - 2)^2(p + 5)(p + 7).$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{(p - 2)^2(p + 5)(p + 7)} = \frac{k_1^{(2)}}{(p - 2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p - 2} + \frac{k_2}{p + 5} + \frac{k_3}{p + 7}$$



Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Vynásobíme rovnici členem $(p - 2)^2$

$$\frac{(p - 2)^2}{(p - 2)^2(p + 5)(p + 7)} = k_1^{(2)} + k_1^{(1)}(p - 2) + \frac{k_2(p - 2)^2}{p + 5} + \frac{k_3(p - 2)^2}{p + 7}$$

a nalezneme limitu pro $p \rightarrow 2$,

$$\frac{1}{(2 + 5)(2 + 7)} = k_1^{(2)}$$



Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Odečteme-li výraz $\frac{1}{63(p-2)^2}$ od obou stran původní rovnice dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} - \frac{1}{63(p-2)^2} \\ = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7} \end{aligned}$$

resp. rovnici

$$\frac{1}{63} \left[\frac{-(p+14)}{(p-2)(p+5)(p+7)} \right] = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7},$$



Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

pro kterou se výpočet k_μ redukuje na případ s jednoduchými póly a platí

$$\begin{aligned}k_1^{(1)} &= -\frac{2^4}{7^2 \times 9^2}, \\k_2 &= \frac{1}{2 \times 7^2}, \\k_3 &= -\frac{1}{2 \times 9^2}.\end{aligned}$$



Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Diferenciální rovnici

$$\ddot{y}(t) + 2a\dot{y}(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(0) = c_2,$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace.



Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Protože platí

$$\mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) = pY(p) - y(0)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) = p^2 Y(p) - py(0) - \dot{y}(0)$$

nalezneme Laplaceovou transformací diferenciální rovnice její algebraický tvar

$$p^2 Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) + 2a(pY(p) - y(0)) + (a^2 + b^2) Y(p) = U(p).$$



Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Vyřešíme předchozí rovnici vzhledem k obrazu výstupní veličiny $Y(p)$ a dostáváme

$$(p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)) Y(p) = U(p) + py(0) + \dot{y}(0) + 2ay(0)$$

nebo

$$Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}$$



Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu $\frac{Y(p)}{U(p)}$ pro nulové počáteční podmínky a tedy

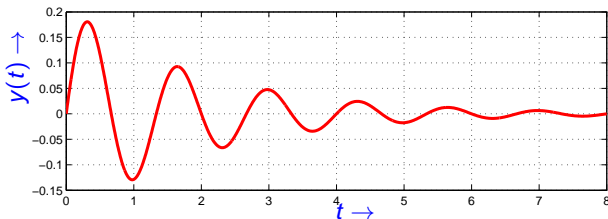
$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}$$



Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Impulsní odezvu určíme jako zpětnou Laplaceovu transformaci přenosové funkce

$$\mathcal{L}^{-1}(H(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+a)^2 + b^2}\right) = \frac{1}{b}e^{-at} \sin bt$$



Obrázek: Impulsní odezva



Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme zpětnou Laplaceovu transformací $s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(H(p)\frac{1}{p}\right)$

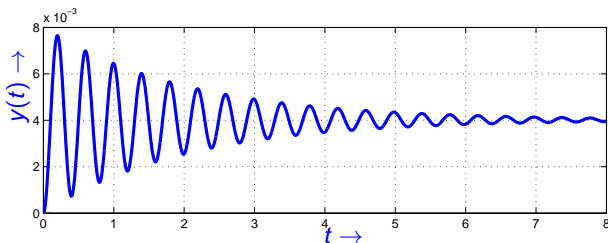
$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p((p+a)^2+b^2)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right) = \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2} - \frac{a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right) \\ &= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - e^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right]. \end{aligned}$$



Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{a^2 + b^2} \left[\frac{1}{p} - \frac{p + 2a}{(p + a)^2 + b^2} \right] \right) =$$

$$\frac{1}{a^2 + b^2} \left[1 - e^{-at} \cos bt - \frac{a}{b} e^{-at} \sin bt \right]$$



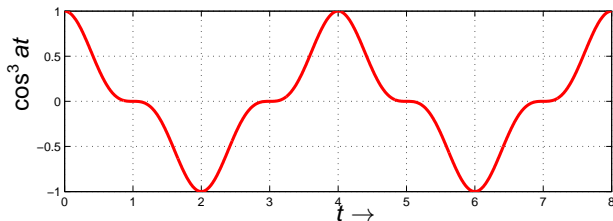
Obrázek: Přechodová odezva



Zpětná Laplaceova transformace - příklad 3

Ukažte, že

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{p(p^2 + 7a^2)}{(p^2 + a^2)(p^2 + 9a^2)} \right] = \cos^3 at$$



Obrázek: Průběh funkce $\cos^3 at$ pro $a = \pi/2$.



Zpětná Laplaceova transformace - příklad 3

Použijeme-li vztah

$$\cos 3at = 4 \cos^3 at - 3 \cos at,$$

máme podle tabulek

$$\mathcal{L} [4 \cos^3 at] = \mathcal{L} [\cos 3at + 3 \cos at] = \frac{p}{p^2 + 9a^2} + \frac{3p}{p^2 + a^2},$$

který snadno upravíme do tvaru

$$\frac{p}{p^2 + 9a^2} + \frac{3p}{p^2 + a^2} = p \frac{3p^2 + 27a^2 + p^2 + a^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + 9a^2)} = 4p \frac{p^2 + 7a^2}{(p^2 + a^2)(p^2 + 9a^2)}.$$

QED



