Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

4. dubna 2013

Obsah

Obsah

Obsah

Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Je zřejmé, že v inverzní transformaci hrají výsadní roli póly racionální lomené funkce. Proto se v dalším můžeme zabývat pouze takovými racionálně lomenými funkcemi, jejichž čitatel je jednotkový

$$H(p) = \frac{1}{N(p)}.$$

Jestliže tedy

$$N(p) = (p - p_1)^{\beta_1}(p - p_2)^{\beta_2} \dots (p - p_n)^{\beta_n}$$

má násobné kořeny, potom inverzní Laplaceova transformace má tvar...

Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{N(p)}\right] &= e^{p_1 t}\left[k_1^{(1)} + k_1^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots k_1^{(\beta_1)}\frac{t^{\beta_1-1}}{(\beta_1-1)!}\right] \\
&+ e^{p_2 t}\left[k_2^{(1)} + k_2^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots k_2^{(\beta_2)}\frac{t^{\beta_2-1}}{(\beta_2-1)!}\right] \\
&\vdots \\
&+ e^{p_n t}\left[k_n^{(1)} + k_n^{(2)}\frac{t}{1!} + \dots k_n^{(\beta_n)}\frac{t^{\beta_n-1}}{(\beta_n-1)!}\right]
\end{aligned}
$$

Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Koeficienty $k_\mu^{(\beta_m)}$ můžeme získat následujícím postupem.

Nechť například

$$N(p) = (p-2)^2(p+5)(p+7).$$

Rozklad na parciální zlomky hledáme ve tvaru

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} = \frac{k_1^{(2)}}{(p-2)^2} + \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}$$

Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Vynásobíme rovnici členem $(p-2)^2$

$$\frac{(p-2)^2}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} = k_1^{(2)} + k_1^{(1)}(p-2) + \frac{k_2(p-2)^2}{p+5} + \frac{k_3(p-2)^2}{p+7}$$

a nalezneme limitu pro $p \to 2$,

$$\frac{1}{(2+5)(2+7)} = k_1^{(2)}$$

Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

Odečteme-li výraz $\dfrac{1}{63(p-2)^2}$ od obou stran původní rovnice dostáváme

$$\frac{1}{(p-2)^2(p+5)(p+7)} - \frac{1}{63(p-2)^2}$$
$$= \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7}$$

resp. rovnici

$$\frac{1}{63}\left[\frac{-(p+14)}{(p-2)(p+5)(p+7)}\right] = \frac{k_1^{(1)}}{p-2} + \frac{k_2}{p+5} + \frac{k_3}{p+7},$$

Zpětná Laplaceova transformace - násobné póly

pro kterou se výpočet k_μ redukuje na případ s jednoduchými póly a platí

$$\begin{aligned} k_1^{(1)} &= -\frac{2^4}{7^2 \times 9^2}\,, \\ k_2 &= \frac{1}{2 \times 7^2}\,, \\ k_3 &= -\frac{1}{2 \times 9^2}\,. \end{aligned}$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Diferenciální rovnici

$$\ddot{y}(t) + 2a\dot{y}(t) + (a^2 + b^2)y(t) = u(t)$$

s počátečními podmínkami ve tvaru

$$y(0) = c_1 \quad \text{a} \quad \dot{y}(0) = c_2,$$

řešíme pomocí Laplaceovy transformace.

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Protože platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) &= pY(p) - y(0) \\ \mathcal{L}\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) &= p^2Y(p) - py(0) - \dot{y}(0) \end{aligned}$$

nalezneme Laplaceovou transformací diferenciální rovnice její algebraický tvar

$$p^2Y(p)-py(0)-\dot{y}(0)+2a(pY(p)-y(0))+(a^2+b^2)Y(p) = U(p).$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Vyřešíme předchozí rovnici vzhledem k obrazu výstupní veličiny Y(p) a dostáváme

$$\left(p^2 + 2ap + (a^2 + b^2)\right) Y(p) = U(p) + py(0) + \dot{y}(0) + 2ay(0)$$

nebo

$$\boxed{Y(p) = \frac{U(p) + c_2 + (p + 2a)c_1}{(p + a + ib)(p + a - ib)}}$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

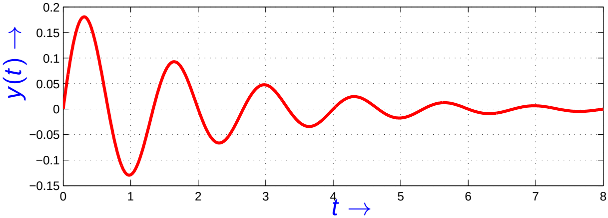
Přenosová funkce $H(p)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu $\dfrac{Y(p)}{U(p)}$ pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{(p+a+ib)(p+a-ib)}}$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Impulsní odezvu určíme jako zpětnou Laplaceovu transformaci přenosové funkce

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}(H(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p+a)^2+b^2}\right) = \frac{1}{b}e^{-at}\sin bt}$$



Obrázek: Impulsní odezva

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

Přechodovou odezvu $s(t)$ určíme zpětnou Laplaceovu transformaci $s(t) = \mathcal{L}^{-1}(H(p)\frac{1}{p})$

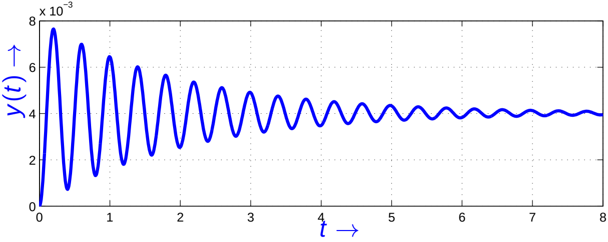
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p((p+a)^2+b^2)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right) =$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p} - \frac{p+a}{(p+a)^2+b^2} - \frac{a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[1 - e^{-at}\cos bt - \frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right] .$$

Obecné řešení diferenciální rovnici druhého řádu

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{1}{p}-\frac{p+2a}{(p+a)^2+b^2}\right]\right)=$$
$$\frac{1}{a^2+b^2}\left[1-e^{-at}\cos bt-\frac{a}{b}e^{-at}\sin bt\right]$$

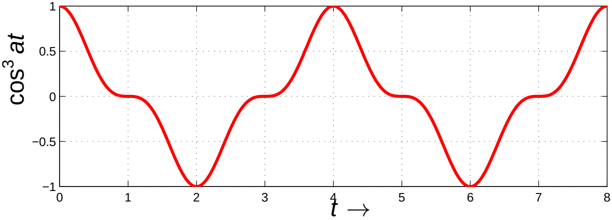


Obrázek: Přechodová odezva

Zpětná Laplaceova transformace - příklad 3

Ukažte, že

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p(p^2+7a^2)}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)}\right] = \cos^3 at$$



Obrázek: Průběh funkce $\cos^3 at$ pro $a = \pi/2$.

Zpětná Laplaceova transformace - příklad 3

Použijeme-li vztah

$$\cos 3at = 4\cos^3 at - 3\cos at,$$

máme podle tabulek

$$\mathcal{L}\left[4\cos^3 at\right] = \mathcal{L}\left[\cos 3at + 3\cos at\right] = \frac{p}{p^2+9a^2} + \frac{3p}{p^2+a^2},$$

který snadno upravíme do tvaru

$$\frac{p}{p^2+9a^2} + \frac{3p}{p^2+a^2} = p\frac{3p^2+27a^2+p^2+a^2}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)} = 4p\frac{p^2+7a^2}{(p^2+a^2)(p^2+9a^2)}.$$

QED

Domácí úkol

Příklad a

Integrální rovnice tvaru

$$x(t) = f(t) + \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau,$$

kde $f(t)$ a $g(t)$ jsou známé funkce a $x(t)$ je neznámá fukce, se nazývá Volterrova[1] integrální rovnice. Pomocí Laplaceovy transformace určete $x(t)$ z rovnice

$$x(t) = t^3 + \int_0^t \sin(t-\tau)x(\tau)d\tau.$$

Povšimněte si, že integrál v uvedené rovnici je typu konvoluce.

[1] Vito Volterra 1860-1940

Domácí úkol

Příklad b), c)

- Nalezněte řešení $y(t)$ diferenciální rovnice

$$\ddot{y}(t) + 4y(t) = 2\cos 2t$$

  s počátečními podmínkami $y(0) = 0$ a $\dot{y}(0) = 4$.

- Nalezněte funkci $f(t)$ pro

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{2p}{(p+1)^2}.$$


Don't
switch!