

Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

17. dubna 2012



Obsah

- 1 Upozornění pro studenty 3. ročníku
- 2 Přenosová funkce, impulsní a přechodová odezva
- 3 Přenosová funkce a vnější popis
- 4 Přenosová funkce a vnitřní popis
- 5 Inverzní matice
- 6 Spojování subsystémů a vazby mezi systémy



Obsah

- 1 Upozornění pro studenty 3. ročníku
- 2 Přenosová funkce, impulsní a přechodová odezva
- 3 Přenosová funkce a vnější popis
- 4 Přenosová funkce a vnitřní popis
- 5 Inverzní matice
- 6 Spojování subsystémů a vazby mezi systémy



Obsah

- 1 Upozornění pro studenty 3. ročníku
- 2 Přenosová funkce, impulsní a přechodová odezva
- 3 Přenosová funkce a vnější popis
- 4 Přenosová funkce a vnitřní popis
- 5 Inverzní matice
- 6 Spojování subsystémů a vazby mezi systémy



Obsah

- 1 Upozornění pro studenty 3. ročníku
- 2 Přenosová funkce, impulsní a přechodová odezva
- 3 Přenosová funkce a vnější popis
- 4 Přenosová funkce a vnitřní popis
- 5 Inverzní matice
- 6 Spojování subsystémů a vazby mezi systémy



Obsah

- 1 Upozornění pro studenty 3. ročníku
- 2 Přenosová funkce, impulsní a přechodová odezva
- 3 Přenosová funkce a vnější popis
- 4 Přenosová funkce a vnitřní popis
- 5 Inverzní matice
- 6 Spojování subsystémů a vazby mezi systémy



Obsah

- 1 Upozornění pro studenty 3. ročníku
- 2 Přenosová funkce, impulsní a přechodová odezva
- 3 Přenosová funkce a vnější popis
- 4 Přenosová funkce a vnitřní popis
- 5 Inverzní matice
- 6 Spojování subsystémů a vazby mezi systémy



Cvičení ve čtvrtek 19. dubna se nekoná. Mgr. Lucie Kárná je tento týden v nemocnici a slíbila domluvit si s vámi náhradní termín !



Přenosová funkce a impulsní odezva

Pro LTI systém je **přenosová funkce** definována jako podíl Laplaceova obrazu výstupu $Y(p)$ ku obrazu vstupu $X(p)$ za předpokladu nulových počátečních podmínek

$$H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

Protože vstup a výstup LTI systému spolu souvisí prostřednictvím konvoluce

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau = h(t) * x(t),$$

platí...



Přenosová funkce a impulsní odezva

že Laplaceova transformace impulsní odezvy $h(t)$ je přenosová funkce

$$H(p) = \mathcal{L} [h(t)] \equiv \int_0^{\infty} h(t) e^{-pt} dt$$

pro kterou je splněn vztah

$$Y(p) = H(p) X(p).$$



Přenosová funkce a přechodová odezva

Přechodová odezva $s(t)$ je definována jako odezva na jednotkový skok. Pro její Laplaceovu transformaci platí

$$S(p) = H(p).X(p) \equiv H(p)\frac{1}{p}.$$

takže platí

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{H(p)}{p} \right].$$

Přechodovou odezvu proto nalezneme jako **integrál impulsní odezvy**

$$s(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau$$



Kmitočtová charakteristika

Kmitočtovou charakteristiku získáme z přenosové funkce substitucí takže platí

$$p = j\omega ,$$

kde ω je úhlový kmitočet. Protože přenosová funkce je racionální lomenou funkcí tvaru

$$H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} \dots + a_0} ,$$



Kmitočtová charakteristika

dostáváme

$$\begin{aligned} H(p)|_{p=j\omega} &= \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} \dots + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} \dots + a_0} \\ &= A(\omega)e^{j\Phi(\omega)}, \end{aligned}$$

kde $A(\omega)$ je amplitudová charakteristika a $\Phi(\omega)$ se nazývá fázová charakteristika.



Kmitočtová charakteristika - příklad 1

Nalezněte amplitudovou a fázovou charakteristiku LTI systému s přenosovou funkcí

$$H(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$



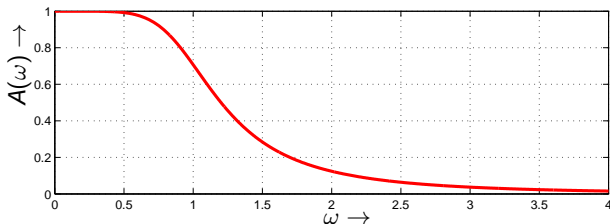
Kmitočtová charakteristika - příklad 1

Postupně platí

$$\begin{aligned}
 H(p)|_{p=j\omega} &= \frac{1}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2 + 2(j\omega) + 1} \\
 &= \frac{1}{-j\omega^3 - 2\omega^2 + 2j\omega + 1} \\
 &= \frac{1}{(1 - 2\omega^2) + j\omega(2 - \omega^2)} \\
 &= \frac{(1 - 2\omega^2) - j\omega(2 - \omega^2)}{(1 - 2\omega^2)^2 + \omega^2(2 - \omega^2)^2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^6}} \frac{(1 - 2\omega^2) - j\omega(2 - \omega^2)}{\sqrt{1 + \omega^6}} \equiv A(\omega)e^{-j\Phi(\omega)}.
 \end{aligned}$$



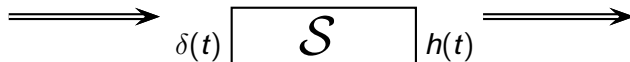
Kmitočtová charakteristika - příklad 1



Obrázek: Kmitočtová charakteristika amplitudy $A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^6}}$



Přenosová funkce a vnější popis

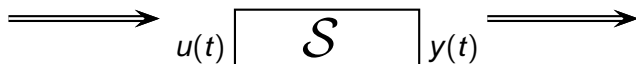


Přenosová funkce LTI systému je ve spojitém čase definována jako Laplaceův obraz odezvy systému na jednotkový impuls při nulových počátečních podmínkách.

$$H(p) = \mathcal{L}[h(t)]$$



Přenosová funkce a vnější popis



Ekvivalentně, je přenosová funkce definována jako poměr Laplaceova obrazu výstupu k Laplaceově obrazu vstupu při nulových počátečních podmínkách

$$H(p) = \frac{\mathcal{L}[y(t)]}{\mathcal{L}[u(t)]} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$



Přenosová funkce a vnější popis

Předpokládejme, že systém je popsán diferenciální rovnicí

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y &= \\ &= b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \dots + b_1 u^{(1)} + b_0 u \end{aligned}$$

kde koeficienty a_i a b_j jsou reálná čísla a pro indexy platí $n \geq m$.

Je-li $n > m$, systém se nazývá ryzí a výstup systému má vždy jisté zpoždění.



Přenosová funkce a vnější popis

Přenos lineárního systému odvodíme pro nulové počáteční podmínky pomocí Laplaceovy transformace obou stran rovnice.

Výsledkem je rovnice

$$\begin{aligned} & \left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0 \right) Y(p) = \\ & = \left(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p^1 + b_0 \right) U(p) \end{aligned}$$

Přenosová funkce má potom tvar racionální lomené funkce

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p^1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0}$$



Přenosová funkce a vnitřní popis

$$\boxed{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}} \Longrightarrow \boxed{H(p)}$$

Stavový model lineárního časově invariantního systému

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t)$$



Přenosová funkce a vnitřní popis

převédeme pomocí Laplaceovy na algebraické rovnice rovnice tvaru

$$pX(p) - x(0) = \mathbf{A} X(p) + \mathbf{B} U(p) \quad (1)$$

$$Y(p) = \mathbf{C} X(p) + \mathbf{D} U(p) \quad (2)$$

Rovnici (1) upravíme do tvaru

$$(p\mathbf{1} - \mathbf{A}) X(p) = x(0) + \mathbf{B} U(p)$$

a vypočítáme

$$X(p) = (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} x(0) + (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} U(p).$$



Přenosová funkce a vnitřní popis

Přenosová funkce je definována pro nulovou počáteční podmínku $x(0) = 0$. Po dosazení do rovnice (2) dostáváme

$$\begin{aligned} Y(p) &= \mathbf{C} (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} U(p) + \mathbf{D} U(p) \\ &= \left[\mathbf{C} (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \right] U(p) \end{aligned} \quad (3)$$

takže přenosová funkce je

$$H(p) = \mathbf{C} (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$$



Přenosová funkce a vnitřní popis

Pokud se jedná o ryzí systém, který nemá žádnou přímou vazbu ze vstupu na výstup a tedy $\mathbf{D} = 0$, potom

$$H(p) = \mathbf{C} (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} = \mathbf{C} \frac{\text{adj}(p\mathbf{1} - \mathbf{A})}{\det(p\mathbf{1} - \mathbf{A})} \mathbf{B}$$



Inverzní matice - příklad matice 2×2

Pro matici 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

je inverzní matice

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

přičemž násobením snadno ověříme, že

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Inverzní matice pomocí Cramerova pravidla

Algebraickým doplňkem k prvku $a_{\ell m}$ v matici $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

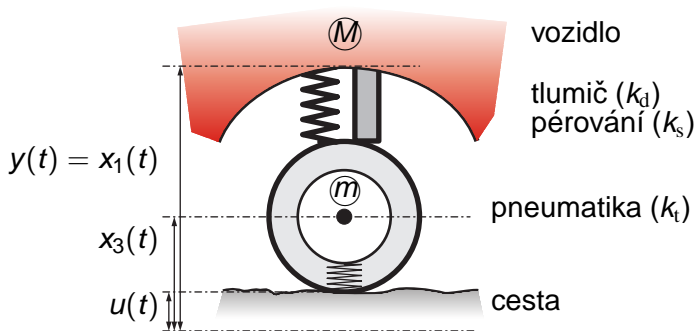
je subdeterminant $\Delta_{\ell m}$, který vznikne vyškrtnutím ℓ -tého řádku a m -tého sloupce. Prvky inverzní matice jsou potom

$$\mathbf{A}_{m \ell}^{-1} = \frac{(-1)^{\ell+m} \Delta_{\ell m}}{\Delta},$$

kde $\det(\mathbf{A}) = \Delta$.



Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2



Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

Na obrázku je model zavěšení kola vozidla a jeho odpružení s koeficienty tuhosti k_t , k_s a k_d . Jestliže platí pohybové rovnice

$$M \ddot{x}_3(t) + k_t [x_3(t) - u(t)] - k_s [x_1(t) - x_3(t)] - k_d [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)] = 0$$

$$m \ddot{x}_1(t) + k_s [x_1(t) - x_3(t)] + k_d [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)] = 0$$

nalezněte stavový popis s použitím vektoru stavových proměnných $[x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]$.

Nalezněte přenosovou funkci $H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$, která

charakterizuje chování vozidla v závislosti na povrchu vozovky .



Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

Zvolíme

$$\begin{aligned}x_1(t) &= y(t), & \dot{x}_1(t) &= x_2(t), \\x_3(t) &, & \dot{x}_3(t) &= x_4(t)\end{aligned}$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{k_s}{m} [x_1(t) - x_3(t)] - \frac{k_d}{m} [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)],$$

$$\dot{x}_3(t) = x_4(t)$$

$$\dot{x}_4(t) = -\frac{k_t}{M} [x_3(t) - u(t)] + \frac{k_s}{M} [x_1(t) - x_3(t)] + \frac{k_d}{M} [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)]$$



Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

Rovnice převedeme na stavový popis

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{k_d}{m} & \frac{k_s}{m} & \frac{k_d}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M} & \frac{k_d}{M} & -\frac{k_s + k_t}{M} & -\frac{k_d}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix} u(t)$$



Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

a

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}$$



Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m} & -\frac{k_d}{m} & \frac{k_s}{m} & \frac{k_d}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M} & \frac{k_d}{M} & -\frac{k_s + k_t}{M} & -\frac{k_d}{M} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$



Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

a platí $H(p) = \mathbf{C}(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ t.j.

$$H(p) = \frac{1}{\Delta} [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \times \begin{bmatrix} * & * & * & -\Delta_{41} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{M} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(k_d p + k_s) k_t}{(M p^2 + k_t)(m p^2 + k_d p + k_s) + m(k_d p + k_s) p^2}$$

kde * označují prvky inverzní matice, které nemusíme pro přenosovou funkci počítat a Δ je determinant $\Delta = \det(p\mathbf{1} - \mathbf{A})$.



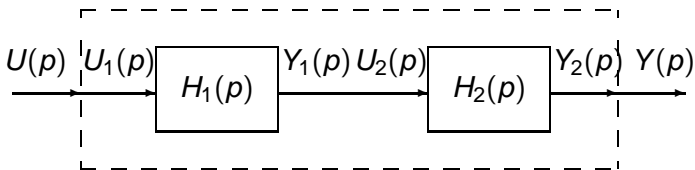
Kaskádní řazení

$$H(p) = H_1(p) \cdot H_2(p)$$

Pro výslednou přenosovou funkci kaskádního řazení dvou subsystémů platí

$$H(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} \cdot \frac{Y(p)}{Y_1(p)} = \frac{Y_1(p)}{U_1(p)} \cdot \frac{Y(p)}{U_2(p)} = H_1(p) \cdot H_2(p)$$

$$H(p) = H_1(p) \times H_2(p)$$



Paralelní řazení

$$H(p) = H_1(p) + H_2(p)$$

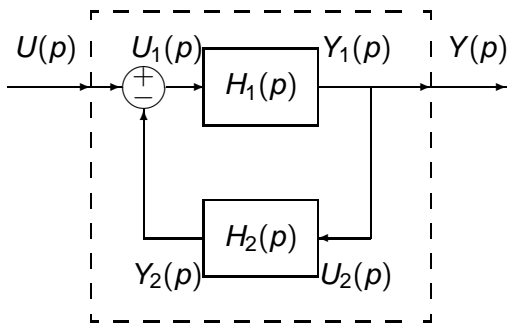
Pro výslednou přenosovou funkci paralelního řazení dvou subsystémů platí

$$H(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} + \frac{Y_2(p)}{U(p)} = H_1(p) + H_2(p)$$



Zpětnovazební řazení

$$H(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p) \cdot H_2(p)}$$



Zpětnovazební řazení

Pro výslednou přenosovou funkci zpětnovazebního řazení dvou subsystémů odvodíme postupně

$$\text{na výstupu} \quad Y_1(p) = Y(p) = U_2(p)$$

$$\text{na vstupu} \quad U_1(p) = U(p) - Y_2(p).$$

Nyní vyjádříme výstupní $Y_1(p)$ a $Y_2(p)$ pomocí dílčích přenosových funkcí a dostaneme

$$\begin{aligned} Y(p) &= H_1(p)U_1(p) \\ &= H_1(p)(U(p) - Y_2(p)) \\ &= H_1(p)(U(p) - H_2(p)U_2(p)) \\ &= H_1(p)(U(p) - H_2(p)Y(p)) \end{aligned}$$



Zpětnovazební řazení

Vyjádříme nakonec

$$Y(p) + H_1(p)H_2(p)Y(p) = H_1(p)U(p)$$

a je

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$



Zpětnovazební řazení

Přenos systému s jednoduchou **zápornou zpětnou vazbou** je dán poměrem přenosu přímé větve ku přenosu celé rozpojené smyčky zvětšenému o 1.

Pokud je zpětný signál na vstupu přičítán, hovoříme o **kladné zpětné vazbě** s znaménko ve jmenovateli je opačné

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_1(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)}$$



Dynamické vlastnosti spojovaných subsystémů

Na dynamických vlastnostech a časových odezvách se podílejí póly dílčích přenosových $[p_{1\infty\mu}, p_{2\infty\mu}]$ funkcí. Pro výsledný

- **kaskádní** systém se poloha pólů nemění
- **paralelní** systém se poloha pólů nemění
- **zpětnovazební** se poloha pólů významně mění



Domácí úkol

Opakujte si Laplaceovu transformaci...



... neboť přijde další test!

