# Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

11. dubna 2013

# Obsah

1. Přenosová funkce, impulsní a přechodová odezva
2. Přenosová funkce a vnější popis
3. Přenosová funkce a vnitřní popis
4. Inverzní matice
5. Spojování subsystémů a vazby mezi systémy

# Obsah

1. Přenosová funkce, impulsní a přechodová odezva
2. Přenosová funkce a vnější popis
3. Přenosová funkce a vnitřní popis
4. Inverzní matice
5. Spojování subsystémů a vazby mezi systémy

# Obsah


1. Přenosová funkce, impulsní a přechodová odezva
2. Přenosová funkce a vnější popis
3. Přenosová funkce a vnitřní popis
4. Inverzní matice
5. Spojování subsystémů a vazby mezi systémy

# Obsah


1. Přenosová funkce, impulsní a přechodová odezva
2. Přenosová funkce a vnější popis
3. Přenosová funkce a vnitřní popis
4. Inverzní matice
5. Spojování subsystémů a vazby mezi systémy

# Obsah

1. Přenosová funkce, impulsní a přechodová odezva
2. Přenosová funkce a vnější popis
3. Přenosová funkce a vnitřní popis
4. Inverzní matice
5. Spojování subsystémů a vazby mezi systémy

# Přenosová funkce a impulsní odezva

Pro LTI systém je přenosová funkce definována jako podíl Laplaceova obrazu výstupu $Y(p)$ ku obrazu vstupu $X(p)$ za předpokladu nulových počátečních podmínek

$$\boxed{H(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}}$$

Protože vstup a výstup LTI systému spolu souvisí prostřednictvím konvoluce

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = h(t) * x(t)\,,$$

platí...

# Přenosová funkce a impulsní odezva

že Laplaceova transformace impulsní odezvy $h(t)$ je přenosová funkce

$$\boxed{H(p) = \mathcal{L}\,[h(t)] = \int_0^\infty h(t)e^{-pt}dt}$$

pro kterou je splněn vztah

$$Y(p) = H(p)\,X(p)\,.$$

# Přenosová funkce a přechodová odezva

Přechodová odezva $s(t)$ je definována jako odezva na jednotkový skok. Pro její Laplaceovu transformaci platí

$$S(p) = H(p).X(p) \equiv H(p)\frac{1}{p}.$$

takže platí

$$s(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{H(p)}{p}\right].$$

Přechodovou odezvu proto nalezneme jako integrál impulsní odezvy

$$\boxed{s(t) = \int_0^t h(\tau)d\tau}$$

# Kmitočtová charakteristika

Kmitočtovou charakteristiku získáme z přenosové funkce substitucí takže platí

$$p = \jmath\omega\,,$$

kde $\omega$ je úhlový kmitočet. Protože přenosová funkce je racionální lomenou funkcí tvaru

$$H(p) = \frac{Q(p)}{N(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} \cdots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} \cdots + a_0}\,,$$

# Kmitočtová charakteristika

dostáváme

$$H(p)|_{p=\jmath\omega} = \frac{b_m(\jmath\omega)^m + b_{m-1}(\jmath\omega)^{m-1}\cdots + b_0}{a_n(\jmath\omega)^n + a_{n-1}(\jmath\omega)^{n-1}\cdots + a_0}$$

$$= A(\omega)e^{\jmath\Phi(\omega)},$$

kde $A(\omega)$ je amplitudová charakteristika a $\Phi(\omega)$ se nazývá fázová charakteristika.

# Kmitočtová charakteristika - příklad 1

Nalezněte amplitudovou a fázovou charakteristiku LTI systému s přenosovou funkcí

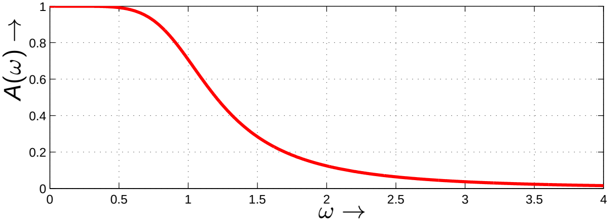
$$H(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 2p + 1}$$

# Kmitočtová charakteristika - příklad 1

Postupně platí

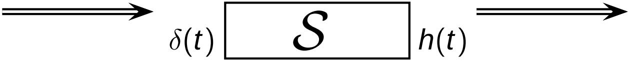
$$
\begin{aligned}
H(p)\big|_{p=\jmath\omega} &= \frac{1}{(\jmath\omega)^3 + 2(\jmath\omega)^2 + 2(\jmath\omega) + 1} \\
&= \frac{1}{-\jmath\omega^3 - 2\omega^2 + 2\jmath\omega + 1} \\
&= \frac{1}{(1-2\omega^2) + \jmath\omega(2-\omega^2)} \\
&= \frac{(1-2\omega^2) - \jmath\omega(2-\omega^2)}{(1-2\omega^2)^2 + \omega^2(2-\omega^2)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\omega^6}} \, \frac{(1-2\omega^2) - \jmath\omega(2-\omega^2)}{\sqrt{1+\omega^6}} \equiv A(\omega)e^{-\jmath\Phi(\omega)}.
\end{aligned}
$$

# Kmitočtová charakteristika - příklad 1




Obrázek: Kmitočtová charakteristika amplitudy $A(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^6}}$

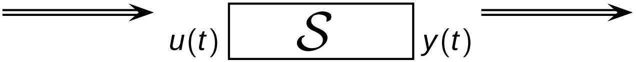
# Přenosová funkce a vnější popis




Přenosová funkce LTI systému je ve spojitém čase definována jako Laplaceův obraz odezvy systému na jednotkový impuls při nulových počátečních podmínkách.

$$H(p) = \mathcal{L}\left[h(t)\right]$$

# Přenosová funkce a vnější popis




Ekvivalentně, je přenosová funkce definována jako poměr Laplaceova obrazu výstupu k Laplaceově obrazu vstupu při nulových počátečních podmínkách

$$H(p) = \frac{\mathcal{L}\left[y(t)\right]}{\mathcal{L}\left[u(t)\right]} = \frac{Y(p)}{U(p)}$$

# Přenosová funkce a vnější popis

Předpokládejme, že systém je popsán diferenciální rovnicí

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y^{(1)} + a_0 y =$$
$$= b_m u^{(m)} + b_{m-1} u^{(m-1)} + \cdots + b_1 u^{(1)} + b_0 u$$

kde koeficienty $a_i$ a $b_j$ jsou reálná čísla a pro indexy platí $n \geq m$.

Je-li $n > m$, systém se nazývá ryzí a výstup systému má vždy jisté zpoždění.

# Přenosová funkce a vnější popis

Přenos lineárního systému odvodíme pro nulové počáteční podmínky pomocí Laplaceovy transformace obou stran rovnice.

Výsledkem je rovnice

$$\left(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p^1 + a_0\right) Y(p) =$$

$$= \left(b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p^1 + b_0\right) U(p)$$

Přenosová funkce má potom tvar racionální lomené funkce

$$H(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \cdots + b_1 p^1 + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \cdots + a_1 p^1 + a_0}$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis

$$\boxed{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}} \Longrightarrow \boxed{H(p)}$$

Stavový model lineárního časově invariantního systému

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\,\mathbf{u}(t)\\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{C}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{aligned}$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis

převedeme pomocí Laplaceovy na algebraické rovnice rovnice tvaru

$$pX(p) - x(0) = \mathbf{A}\,X(p) + \mathbf{B}\,U(p) \qquad (1)$$

$$Y(p) = \mathbf{C}\,X(p) + \mathbf{D}\,U(p) \qquad (2)$$

Rovnici (1) upravíme do tvaru

$$(p\mathbf{1} - \mathbf{A})\; X(p) = x(0) + \mathbf{B}\,U(p)$$

a vypočítáme

$$X(p) = (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\, x(0) + (p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\, \mathbf{B}\,U(p).$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis

Přenosová funkce je definována pro nulovou počáteční podmínku $x(0) = 0$. Po dosazení do rovnice (2) dostáváme

$$\begin{aligned} Y(p) &= \mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B}\,U(p) + \mathbf{D}\,U(p) \\ &= \left[\mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}\right]\,U(p) \end{aligned} \tag{3}$$

takže přenosová funkce je

$$\boxed{H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} + \mathbf{D}}$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis

Pokud se jedná o ryzí systém, který nemá žádnou přímou vazbu ze vstupu na výstup a tedy $\mathbf{D} = 0$, potom

$$\boxed{H(p) = \mathbf{C}\left(p\mathbf{1} - \mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{C}\,\frac{adj\left(p\mathbf{1} - \mathbf{A}\right)}{det\left(p\mathbf{1} - \mathbf{A}\right)}\,\mathbf{B}}$$

# Inverzní matice - příklad matice 2 × 2

Pro matici 2 × 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

je inverzní matice

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

přičemž násobením snadno ověříme, že

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Inverzní matice pomocí Cramerova pravidla

Algebraickým doplňkem k prvku $a_{\ell\ m}$ v matici $n \times n$

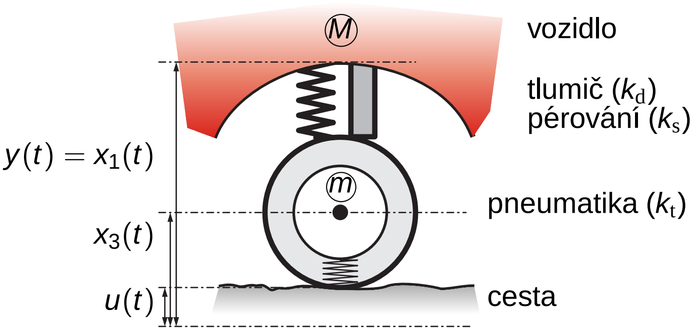
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

je subdeterminant $\Delta_{\ell\ m}$, který vznikne vyškrtnutím $\ell$-tého řádku a $m$-tého sloupce. Prvky inverzní matice jsou potom

$$\mathbf{A}^{-1}_{m\ \ell} = \frac{(-1)^{\ell+m}\Delta_{\ell\ m}}{\Delta},$$

kde $det(\mathbf{A}) = \Delta$.

# Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2



# Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

Na obrázku je model zavěšení kola vozidla a jeho odpružení s koeficienty tuhosti $k_\mathrm{t}$, $k_\mathrm{s}$ a $k_\mathrm{d}$. Jestliže platí pohybové rovnice

$$\begin{aligned} M\,\ddot{x}_3(t) + k_\mathrm{t}\,[x_3(t) - u(t)] - k_\mathrm{s}\,[x_1(t) - x_3(t)] - k_\mathrm{d}\,[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)] &= 0 \\ m\,\ddot{x}_1(t) + k_\mathrm{s}\,[x_1(t) - x_3(t)] + k_\mathrm{d}\,[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)] &= 0 \end{aligned}$$

nalezněte stavový popis s použitím vektoru stavových proměnných $[x_1(t)\, x_2(t)\, x_3(t)\, x_4(t)]$ .
Nalezněte přenosovou funkci $H(p) = \dfrac{Y(p)}{U(p)}$, která charakterizuje chování vozidla v závislosti na povrchu vozovky .

# Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

Zvolíme

$$\begin{aligned} x_1(t) = y(t)\,, \qquad & \dot{x}_1(t) = x_2(t)\,, \\ x_3(t)\,, \qquad & \dot{x}_3(t) = x_4(t) \end{aligned}$$

a dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\,, \\
\dot{x}_2(t) &= -\frac{k_\mathrm{s}}{m}\,[x_1(t) - x_3(t)] - \frac{k_\mathrm{d}}{m}\,[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)]\,, \\
\dot{x}_3(t) &= x_4(t) \\
\dot{x}_4(t) &= -\frac{k_\mathrm{t}}{M}\,[x_3(t) - u(t)] + \frac{k_\mathrm{s}}{M}\,[x_1(t) - x_3(t)] + \frac{k_\mathrm{d}}{M}\,[\dot{x}_1(t) - \dot{x}_3(t)]
\end{aligned}$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

Rovnice převedeme na stavový popis

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_\mathrm{s}}{m} & -\dfrac{k_\mathrm{d}}{m} & \dfrac{k_\mathrm{s}}{m} & \dfrac{k_\mathrm{d}}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_\mathrm{s}}{M} & \dfrac{k_\mathrm{d}}{M} & -\dfrac{k_\mathrm{s}+k_\mathrm{t}}{M} & -\dfrac{k_\mathrm{d}}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_\mathrm{t}}{M} \end{bmatrix} u(t)
$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

a

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t)\,. \end{bmatrix}$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

Máme matice stavového popisu ve tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_\mathrm{s}}{m} & -\dfrac{k_\mathrm{d}}{m} & \dfrac{k_\mathrm{s}}{m} & \dfrac{k_\mathrm{d}}{m} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_\mathrm{s}}{M} & \dfrac{k_\mathrm{d}}{M} & -\dfrac{k_\mathrm{s}+k_\mathrm{t}}{M} & -\dfrac{k_\mathrm{d}}{M} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dfrac{k_\mathrm{t}}{M} \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Přenosová funkce a vnitřní popis - příklad 2

a platí $H(p) = \mathbf{C}\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ t.j.

$$H(p) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} * & * & * & -\Delta_{41} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_\mathrm{t}}{M} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(k_\mathrm{d}\,p + k_\mathrm{s})\,k_\mathrm{t}}{(M\,p^2 + k_\mathrm{t})\,(m\,p^2 + k_\mathrm{d}\,p + k_\mathrm{s}) + m\,(k_\mathrm{d}\,p + k_\mathrm{s})\,p^2}$$

kde $*$ označují prvky inverzní matice, které nemusíme pro přenosovou funkci počítat a $\Delta$ je determinant $\Delta = \det\,(p\mathbf{1} - \mathbf{A})$.

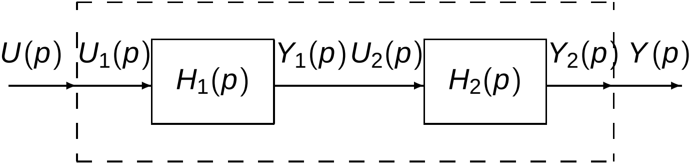
# Kaskádní řazení

$$\boxed{H(p) = H_1(p).H_2(p)}$$

Pro výslednou přenosovou funkci kaskádního řazení dvou subsystémů platí

$$H(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} \cdot \frac{Y(p)}{Y_1(p)} = \frac{Y_1(p)}{U_1(p)} \cdot \frac{Y(p)}{U_2(p)} = H_1(p).H_2(p)$$

$$H(p) = H_1(p) \times H_2(p)$$



# Paralelní řazení

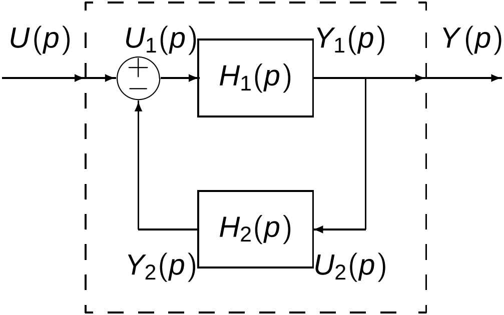
$$\boxed{H(p) = H_1(p) + H_2(p)}$$

Pro výslednou přenosovou funkci paralelního řazení dvou subsystémů platí

$$H(p) = \frac{Y_1(p)}{U(p)} + \frac{Y_2(p)}{U(p)} = H_1(p) + H_2(p)$$

# Zpětnovazební řazení

$$\boxed{H(p) = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p).H_2(p)}}$$



# Zpětnovazební řazení

Pro výslednou přenosovou funkci zpětnovazebního řazení dvou subsystémů odvodíme postupně

$$\begin{aligned} \text{na výstupu} \quad & Y_1(p) = Y(p) = U_2(p) \\ \text{na vstupu} \quad & U_1(p) = U(p) - Y_2(p)\,. \end{aligned}$$

Nyní vyjádříme výstupní $Y_1(p)$ a $Y_2(p)$ pomocí dílčích přenosových funkcí a dostaneme

$$\begin{aligned} Y(p) &= H_1(p)U_1(p) \\ &= H_1(p)\,(U(p) - Y_2(p)) \\ &= H_1(p)\,(U(p) - H_2(p)U_2(p)) \\ &= H_1(p)\,(U(p) - H_2(p)Y(p)) \end{aligned}$$

# Zpětnovazební řazení

Vyjádříme nakonec

$$Y(p) + H_1(p)H_2(p)Y(p) = H_1(p)U(p)$$

a je

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_1(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}$$

# Zpětnovazební řazení

Přenos systému s jednoduchou zápornou zpětnou vazbou je dán poměrem přenosu přímé větve ku přenosu celé rozpojené smyčky zvětšenému o 1.

Pokud je zpětný signál na vstupu přičítán, hovoříme o kladné zpětné vazbě s znaménko ve jmenovateli je opačné

$$H(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{H_1(p)}{1 - H_1(p)H_2(p)}$$

# Dynamické vlastnosti spojovaných subsystémů

Na dynamických vlastnostech a časových odezvách se podílejí póly dílčích přenosových $\left[p_{1\infty\mu}, p_{2\infty\mu}\right]$ funkcí. Pro výsledný

- kaskádní systém se poloha pólů nemění
- paralelní systém se poloha pólů nemění
- zpětnovazební se poloha pólů významně mění

# Domácí úkol

Opakujte si Laplaceovu transformaci...


... neboť příště se již zabýváme diskrétním světem!