

Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

24. dubna 2011



Obsah

① Z-transformace

② Tabulky z-transformace

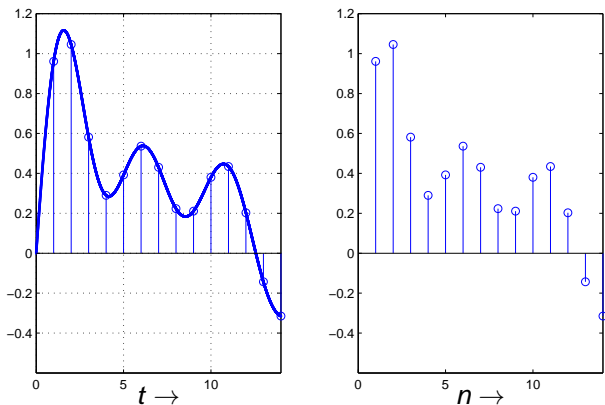


Obsah

- 1 Z-transformace
- 2 Tabulky z-transformace



O původu diskrétní transformace



Obrázek 1: Spojitá funkce $f(t)$ a její ideální vzorkování



O původu diskrétní transformace

Vztah mezi spojitou funkcí $f(t)$ a ideálně vzorkovanou funkcí $f^*(t)$ lze formálně zapsat jako

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\delta(t - nT). \quad (1)$$



O původu diskrétní transformace

Jestliže budeme hledat Laplaceovu transformaci funkce $f^*(t)$ dostaneme postupně

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f^*(t)] &= \int_0^{\infty} f^*(t) e^{-pt} dt \\
 &= \int_0^{\infty} dt \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - nT) e^{-pt} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} dt \delta(t - nT) f(t) e^{-pt} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-pnT} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n},
 \end{aligned}$$



O původu diskrétní transformace

Zavedeme komplexní proměnnou $z = e^{pT}$ a $\{f(nT)\}$ jako posloupnost vzorků příslušné spojité funkce.

Veličinu T nazýváme periodou vzorkování a položíme ji pro zjednodušení $T = 1$.

Dostáváme tak základní vzorec pro z-transformaci

$$\mathcal{Z}[f(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}$$



z-transformace: definice

Jednostranná z transformace posloupnosti $f(n)$ je definována nekonečnou řadou

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}, \quad (2)$$

kterou často označujeme $F(z) = \mathcal{Z}[f(n)]$. Uvedená řada konverguje na vnějšku jednotkové kružnice $|z| > 1$ pro $f(n)$ omezené.



Zpětná z-transformace

Zpětná z-transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky C , která obsahuje všechny singulární body funkce $F(z)$. Pro všechna $n = 0, 1, \dots$ platí

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_C F(z) z^{n-1} dz \equiv \mathcal{Z}^{-1} [F(z)] . \quad (3)$$



z-transformace je lineární

$$\mathcal{Z} \left[\sum_k a_k f_k(n) \right] = \sum_k a_k \mathcal{Z} [f_k(n)] \quad (4)$$

$$\mathcal{Z}^{-1} \left[\sum_m b_m F_m(z) \right] = \sum_m b_m \mathcal{Z}^{-1} [F_m(z)]$$



Věta o změně měřítka

$$a^{-n}f(n) = \mathcal{Z}^{-1} [F(az)] \quad F(a^{-1}z) = \mathcal{Z} [a^n f(n)]$$



Věta o posunutí

Platí

$$\mathcal{Z}[f(n-m)] = z^{-m} \mathcal{Z}[f(n)] = z^{-m} F(z),$$

jestliže uvažujeme $f(n-m) = 0$ pro $n-m < 0$.

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[f(n+m)] &= z^m \left[\mathcal{Z}[f(n)] - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu) z^{-\nu} \right] \\ &= z^m \left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu) z^{-\nu} \right] \end{aligned}$$



Věta o konvoluci - dokážeme ji pomocí násobení polynomů

$$\mathcal{Z} \left[\sum_{m=0}^{\infty} f(n-m)g(m) \right] = F(z)G(z)$$



Věta o transformaci částečné sumy posloupnosti

$$\mathcal{Z} \left[\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\nu) \right] = \frac{1}{z-1} \mathcal{Z} [f(n)] = \frac{1}{z-1} F(z)$$



Věta o derivaci obrazu

$$\mathcal{Z}[nf(n)] = -z \frac{dF(z)}{dz}$$



Diference

Pro $m = 1, 2, \dots$ definujeme diference

$$\Delta^0 f(n) = f(n)$$

$$\Delta^1 f(n) = f(n+1) - f(n),$$

$$\Delta^m f(n) = \Delta \left[\Delta^{m-1} f(n) \right]$$

a platí

$$\mathcal{Z} [\Delta f(n)] = (z - 1)F(z) - f(0)z$$



$f(n) = \mathcal{Z}^{-1} [F(z)]$	$F(z) = \mathcal{Z} [f(n)]$
$\delta(n)$	1
$1(n)$	$\frac{1}{1 - z^{-1}}$
a^n	$\frac{1}{1 - az^{-1}}$
na^n	$\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2}$



$f(n) = \mathcal{Z}^{-1} [F(z)]$	$F(z) = \mathcal{Z} [f(n)]$
$a^n \sin n\vartheta$	$\frac{az^{-1} \sin \vartheta}{1 - 2az^{-1} \cos \vartheta + a^2z^{-2}}$
$a^n \cos n\vartheta$	$\frac{1 - az^{-1} \cos \vartheta}{1 - 2az^{-1} \cos \vartheta + a^2z^{-2}}$
$a^n \sinh n\varphi$	$\frac{az^{-1} \sinh \varphi}{1 - 2az^{-1} \cosh \varphi + a^2z^{-2}}$
$a^n \cosh n\varphi$	$\frac{1 - az^{-1} \cosh \varphi}{1 - 2az^{-1} \cosh \varphi + a^2z^{-2}}$

