Modelování systémů a procesů

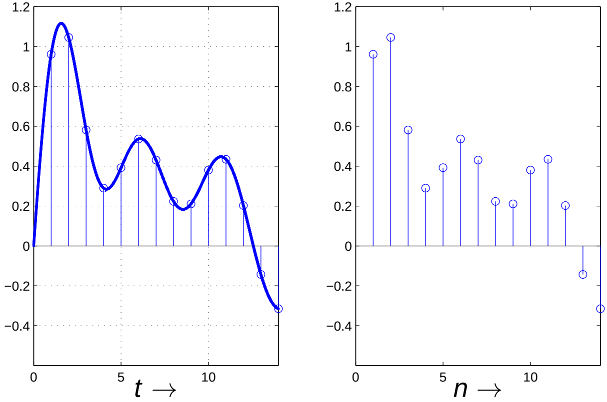
prof. Miroslav Vlček

18. dubna 2013

Obsah

Obsah

O původu diskrétní transformace



Obrázek 1: Spojitá funkce $f(t)$ a její ideální vzorkování

O původu diskrétní transformace

Vztah mezi spojitou funkcí $f(t)$ a ideálně vzorkovanou funkcí $f^*(t)$ lze formálně zapsat jako

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\delta(t - nT)\,. \tag{1}$$

Tento vztah může být zapsán také jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, f(t)\delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,. \tag{2}$$

O původu diskrétní transformace

Jestliže budeme hledat Laplaceovu transformaci funkce $f^*(t)$ dostaneme postupně

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f^*(t)] &= \int_0^\infty f^*(t)\, e^{-pt} dt \\
&= \int_0^\infty dt \sum_{n=0}^{\infty} f(t)\, \delta(t - nT)\, e^{-pt} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^\infty dt\, \delta(t - nT)\, f(t)\, e^{-pt} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-pnT} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} ,
\end{aligned}
$$

O původu diskrétní transformace

Zavedeme komplexní proměnnou $z = e^{pT}$ a $\{f(nT)\}$ jako posloupnost vzorků příslušné spojité funkce.

Veličinu T nazýváme periodou vzorkování a položíme ji pro zjednodušení $T = 1$.

Dostáváme tak základní vzorec pro z-transformaci

$$\mathcal{Z}\left[f(n)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}$$

z-transformace: definice

Jednostranná z transformace posloupnosti $f(n)$ je definována nekonečnou řadou

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{-n}, \tag{3}$$

kterou často označujeme $F(z) = \mathcal{Z}[f(n)]$. Uvedená řada konverguje na vnějšku jednotkové kružnice $|z| > 1$ pro $f(n)$ omezené.

Zpětná z-transformace

Zpětná z-transformace má tvar integrálu podél uzavřené křivky C, která obsahuje všechny singulární body funkce $F(z)$. Pro všechna $n = 0, 1, \ldots$ platí

$$f(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C} F(z) z^{n-1} dz \equiv \mathcal{Z}^{-1}\left[F(z)\right] . \qquad (4)$$

z-transformace je lineární

$$\mathcal{Z}\left[\sum_k a_k f_k(n)\right] = \sum_k a_k \mathcal{Z}\left[f_k(n)\right] \qquad (5)$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_m b_m F_m(z)\right] = \sum_m b_m \mathcal{Z}^{-1}\left[F_m(z)\right]$$

Věta o změně měřítka

$$a^{-n} f(n) = \mathcal{Z}^{-1}\left[F(az)\right] \qquad F(a^{-1}z) = \mathcal{Z}\left[a^n f(n)\right]$$

Věta o posunutí

Platí

$$\mathcal{Z}\left[f(n-m)\right] = z^{-m}\mathcal{Z}\left[f(n)\right] = z^{-m}F(z)\,,$$

jestliže uvažujeme $f(n-m) = 0$ pro $n - m < 0$.

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}\left[f(n+m)\right] &= z^{m}\left[\mathcal{Z}\left[f(n)\right] - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu)z^{-\nu}\right]\\ &= z^{m}\left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu)z^{-\nu}\right]\end{aligned}$$

Věta o konvoluci - dokážeme ji pomocí násobení polynomů

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{m=0}^{\infty} f(n-m)g(m)\right] = F(z)G(z)$$

Věta o transformaci částečné sumy posloupnosti

$$\mathcal{Z}\left[\sum_{\nu=0}^{n-1} f(\nu)\right] = \frac{1}{z-1}\mathcal{Z}\left[f(n)\right] = \frac{1}{z-1}F(z)$$

Věta o derivaci obrazu

$$\mathcal{Z}\left[nf(n)\right] = -z\frac{dF(z)}{dz}$$

Diference

Pro $m = 1, 2, \ldots$ definujeme diference

$$
\begin{aligned}
\Delta^0 f(n) &= f(n) \\
\Delta^1 f(n) &= f(n+1) - f(n), \\
\Delta^m f(n) &= \Delta\left[\Delta^{m-1} f(n)\right]
\end{aligned}
$$

a platí

$$
\mathcal{Z}\left[\Delta f(n)\right] = (z-1)F(z) - f(0)z
$$

$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$	$F(z) = \mathcal{Z}[f(n)]$
$\delta(n)$	1
$1(n)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
a^n	$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$
na^n	$\dfrac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$

$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)]$	$F(z) = \mathcal{Z}[f(n)]$
$a^n \sin n\vartheta$	$\dfrac{az^{-1}\sin\vartheta}{1 - 2az^{-1}\cos\vartheta + a^2z^{-2}}$
$a^n \cos n\vartheta$	$\dfrac{1 - az^{-1}\cos\vartheta}{1 - 2az^{-1}\cos\vartheta + a^2z^{-2}}$
$a^n \sinh n\varphi$	$\dfrac{az^{-1}\sinh\varphi}{1 - 2az^{-1}\cosh\varphi + a^2z^{-2}}$
$a^n \cosh n\varphi$	$\dfrac{1 - az^{-1}\cosh\varphi}{1 - 2az^{-1}\cosh\varphi + a^2z^{-2}}$