# Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

2. května 2012

# Obsah

# Obsah

# Metody výpočtu inverzní z-transformace

Zpětná z-transformace má tvar integrálu

$$y(n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C} Y(z) z^{n-1} dz \equiv \mathcal{Z}^{-1}[Y(z)]$$

podél uzavřené křivky C, která obsahuje všechny singulární body racionální lomené funkce

$$Y(z) = \frac{Q(z)}{N(z)}.$$

## Metody výpočtu inverzní z-transformace

O racionální lomené funkci

$$\frac{Q(z)}{N(z)}$$

říkáme, že má nulové body $z_{0\nu}$, jestliže

$$Q(z_{0\nu}) = 0\,,$$

a že má póly $z_{\infty\mu}$, jestliže

$$N(z_{\infty\mu}) = 0\,.$$

## Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

Pokud má funkce $\dfrac{Q(z)}{N(z)}$ jednoduché póly, potom

$$N(z) = \prod_{\mu=1}^{N} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) = (1 - z_{\infty 1} z^{-1})(1 - z_{\infty 2} z^{-1}) \dots$$

$$\dots (1 - z_{\infty N} z^{-1})$$

## Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

a platí

$$
\begin{aligned}
\frac{Q(z)}{N(z)} &= \sum_{\mu=1}^{N} \frac{k_\mu}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}} \\
&= \frac{k_1}{1 - z_{\infty 1} z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_{\infty 2} z^{-1}} + \dots \\
&\qquad \dots + \frac{k_N}{1 - z_{\infty N} z^{-1}}
\end{aligned}
$$

## Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

kde

$$
\begin{aligned}
k_\mu &= \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{Q(z)}{N(z)} \\
&= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \to z_{\infty\mu}} (1 - z_{\infty\mu} z^{-1}) \frac{1}{N(z)} \\
&= Q(z_{\infty\mu}) \lim_{z \to z_{\infty\mu}} \frac{1}{\dfrac{N(z)}{1 - z_{\infty\mu} z^{-1}}} \\
&= Q(z_{\infty\mu}) \frac{1}{N'(z_{\infty\mu})}
\end{aligned}
$$

# Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

Pro jednoduchost budeme dále psát $z_{\infty\mu} \to z_{\mu}$.

Protože pro $|az^{-1}| < 1$ platí

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{1}{1-az^{-1}}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}\right] = a^n$$

## Rozklad racionální lomené funkce na parciální zlomky

dostaneme

$$\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{Q(z)}{N(z)}\right] = \mathcal{Z}^{-1}\left[\sum_{\mu=1}^{N} \frac{k_\mu}{1 - z_\mu z^{-1}}\right] = \sum_{\mu=1}^{N} k_\mu z_\mu^n .$$

## Diferenční rovnice - mikroekonomický model

Rovnice nabídky - nabídka dnes závisí na včerejší ceně a to tak, že nabídka stoupá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{C} > 0$ platí

$$n(k) = \mathcal{C}c(k-1) + \mathcal{A}x(k). \qquad (1)$$

## Diferenční rovnice - mikroekonomický model

Rovnice poptávky - poptávka dnes závisí na dnešní ceně a to tak, že poptávka klesá s rostoucí cenou. Pro $\mathcal{D} > 0$ platí

$$p(k) = -\mathcal{D}c(k) + \mathcal{B}x(k). \tag{2}$$

## Diferenční rovnice - mikroekonomický model

Rovnost nabídky a poptávky

$$n(k) = p(k) \tag{3}$$

pak vede na diferenční rovnici prvního řádu

$$c(k) + \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} c(k-1) = \frac{\mathcal{B} - \mathcal{A}}{\mathcal{D}} x(k). \tag{4}$$

# Řešení diferenční rovnice 1.řádu

Pro jednoduchost označíme

$$\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{D}} \equiv \gamma \qquad \frac{\mathcal{B}-\mathcal{A}}{\mathcal{D}} \equiv \alpha.$$

Diferenční rovnice má v označení $c(k) \equiv y(k)$ tvar

$$y(k) + \gamma y(k-1) = \alpha x(k)$$

## Řešení diferenční rovnice 1.řádu

Za předpokladu $x(k) \equiv 1(k)$ a $y(k) = 0$ pro $k < 0$ dostaneme s použitím $z$ transformace algebraickou rovnici

$$Y(z) + \gamma z^{-1} Y(z) = \frac{\alpha}{1 - z^{-1}}$$

s řešením v rovině $z$ ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1 - z^{-1})(1 + \gamma z^{-1})}.$$

# Řešení diferenční rovnice 1.řádu

Rozkladem na parciální zlomky

$$Y(z) = \frac{\alpha}{(1-z^{-1})(1+\gamma z^{-1})} = \frac{k_1}{1-z^{-1}} + \frac{k_2}{1+\gamma z^{-1}},$$

kde

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})Y(z) = \frac{\alpha}{1+\gamma}, \\ k_2 &= \lim_{z\to -\gamma}(1+\gamma z^{-1})Y(z) = \frac{\alpha\gamma}{1+\gamma}. \end{aligned}$$

# Řešení diferenční rovnice 1.řádu

Zpětná transformace funkce

$$Y(z) = \frac{\alpha}{1+\gamma}\left(\frac{1}{(1-z^{-1})} + \frac{\gamma}{1+\gamma z^{-1}}\right)$$

vede na řešení diferenční rovnice

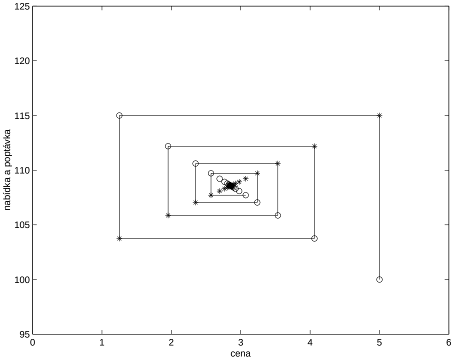
$$y(k) = \frac{\alpha}{1+\gamma}\left(1-(-\gamma)^{k+1}\right)1(k),$$

které v případě stabilního trhu $\gamma = \dfrac{C}{D} < 1$ určuje limitní velikost ceny

$$\lim_{k\to\infty} c(k) = \frac{\alpha}{1+\gamma} = \frac{B-A}{C+D}.$$

# Řešení diferenční rovnice 1.řádu

Pro následující obrázek byly zvoleny hodnoty
$A = 100, B = 120, C = 3, D = 4.$



## Řešení diferenční rovnice 2.řádu

Hledejme řešení diferenční rovnice druhého řádu, která popisuje LTI diskrétní systém,

$$y(n+2)+a_1y(n+1)+a_2y(n)=b_0x(n+2)+b_1x(n+1)+b_2x(n) \tag{5}$$

splňující počáteční podmínky ve tvaru

$$x(0)=x(1)=0 \quad \text{a} \quad y(0)=1, y(1)=\alpha<1. \tag{6}$$

## Řešení diferenční rovnice 2.řádu

Rovnici (5) řešíme pomocí z-transformace. Protože platí

$$\mathcal{Z}\{y((n+m)\} = z^m\left(Y(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} y(\nu)z^{-\nu}\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{y(n)\} &= Y(z),\\
\mathcal{Z}\{y(n+1)\} &= z^1(Y(z) - y(0)),\\
\mathcal{Z}\{y(n+2)\} &= z^2(Y(z) - y(0) - z^{-1}y(1)).
\end{aligned}$$

# Řešení diferenční rovnice 2.řádu

Transformací nalezneme algebraický tvar diferenční rovnice (5) a s použitím počátečních podmínek platí

$$\begin{aligned} Y(z)\left(z^2 + a_1 z^1 + a_2\right) - z^1 y(0) - z^2 y(0) - z^1 y(1) \\ = X(z)\left(b_0 z^2 + b_1 z^1 + b_2\right) . \end{aligned} \tag{7}$$

resp.

$$Y(z) = \frac{X(z)\left(b_0 z^2 + b_1 z^1 + b_2\right) + z^1 + z^2 1 + z^1 \alpha}{z^2 + a_1 z^1 + a_2} . \tag{8}$$

## Řešení diferenční rovnice 2.řádu

Přenosová funkce $H(z)$ je definována jako podíl obrazu výstupu k obrazu vstupu $\dfrac{Y(z)}{X(z)}$ pro nulové počáteční podmínky a tedy

$$
\begin{aligned}
H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \\
= \frac{b_2}{a_2} &+ \frac{\left[b_0 - \frac{b_2}{a_2}\right] + \left[b_1 - a_1 \frac{b_2}{a_2}\right] z^{-1}}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})} \\
= \frac{b_2}{a_2} &+ \frac{c_0 + c_1 z^{-1}}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

# Řešení diferenční rovnice 2.řádu

kde $z_1, z_2$ jsou póly přenosové funkce

$$z_{1,2} = \left(-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}\right)/2\,. \tag{10}$$

a

$$c_0 = b_0 - \frac{b_2}{a_2} \quad \text{a} \quad c_1 = b_1 - a_1\frac{b_2}{a_2}. \tag{11}$$

## Řešení diferenční rovnice 2.řádu

Impulsní odezvu určíme jako inverzní z-transformaci přenosové funkce.

Potože platí

$$\begin{aligned} \lim_{z \to z_1} H(z)(1 - z_1 z^{-1}) &= \frac{c_0 z_1 + c_1}{z_1 - z_2}\,, \\ \lim_{z \to z_2} H(z)(1 - z_2 z^{-1}) &= -\frac{c_0 z_2 + c_1}{z_1 - z_2}\,, \end{aligned}$$

obdržíme impulsní odezvu ve tvaru

## Řešení diferenční rovnice 2.řádu

$$h(n) \equiv \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{b_2}{a_2} + \frac{\left[b_0 - \frac{b_2}{a_2}\right] + \left[b_1 - a_1\frac{b_2}{a_2}\right]z^{-1}}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})}\right)$$

$$= \frac{b_2}{a_2}\delta(n) + \left(c_0\frac{z_1^{n+1} - z_2^{n+1}}{z_1 - z_2} + c_1\frac{z_1^n - z_2^n}{z_1 - z_2}\right)$$


Don't
switch!