

Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

9. května 2012



Obsah

1 Řešení diferenciálních rovnic

2 Přenosová funkce



Obsah

- 1 Řešení diferenciálních rovnic
- 2 Přenosová funkce



Řešení diferenčních rovnic

Diferenční rovnice

$$y(n) - y(n - 1) = x(n)$$

je diskrétní obdobou diferenciální rovnice

$$\dot{y}(t) = x(t).$$

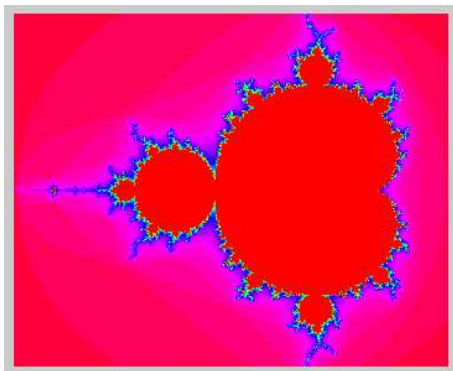
Uvedená diferenční rovnice je lineární.



Řešení diferenčních rovnic

Nelineární diferenční rovnice se vyskytuje například při iteraci Mandelbrovy množiny

$$y(n+1) = y^2(n) + z.$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 1

Obdrželi jste půjčku $y(0)$ Kč, kterou musíte splácet shodnými splátkami $x(n) = x(0) \mathbf{1}(n)$ Kč. Úroková sazba je $\alpha = 11\%$.

- Nalezněte diferenční rovnici pro dosud nezaplacenou sumu $y(n)$ v každém splatném období.
- Použijte z-transformaci k nalezení posloupnosti $y(n)$.
- Nalezněte vztah pro počet splátek N jestliže znáte hodnoty půjčky, splátky a úrokové sazby.



Řešení diferenčních rovnic - příklad 1

Jestliže

- $y(n)$ je částka, kterou zbývá zaplatit v n -tém splatném období,
- $x(n) = x(0)$ je pravidelná splátka,
- α je úroková míra $\alpha = 0.11 = \frac{11}{100} = 11\%$,

potom platí

$$y(n+1) = (1 + \alpha)y(n) - x(n).$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 1

Diferenční rovnici upravíme do obvyklého tvaru

$$y(n+1) - (1 + \alpha)y(n) = -x(n).$$

Transformací získáme algebraickou rovnici

$$z Y(z) - z y(0) - (1 + \alpha) Y(z) = \frac{-x(0)}{1 - z^{-1}}$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 1

s řešením

$$Y(z) = \frac{y(0)}{1 - (1 + \alpha)z^{-1}} - \frac{z^{-1}x(0)}{(1 - z^{-1})(1 - (1 + \alpha)z^{-1})},$$

kterou upravíme na tvar

$$Y(z) = \frac{y(0)}{1 - (1 + \alpha)z^{-1}} - \frac{x(0)}{\alpha} \left[\frac{1}{(1 - (1 + \alpha)z^{-1})} - \frac{1}{(1 - z^{-1})} \right].$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 1

Inverzní transformací získáme

$$\begin{aligned}y(n) &= y(0)(1 + \alpha)^n - x(0) \frac{(1 + \alpha)^n - 1}{(1 + \alpha) - 1} \\ &= y(0)(1 + \alpha)^n - x(0) \sum_{k=0}^{n-1} (1 + \alpha)^k.\end{aligned}$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 1

Označíme N jako počet splatných období nutný ke splacení vypůjčené částky $y(0)$ splátkami $x(0)$ při úrokové míře α , potom z rovnosti $y(N) = 0$ dostaneme

$$\alpha \frac{y(0)}{x(0)} = \frac{(1 + \alpha)^N - 1}{(1 + \alpha)^N} = 1 - \frac{1}{(1 + \alpha)^N}$$

a odtud

$$N = - \frac{\log \left(1 - \alpha \frac{y(0)}{x(0)} \right)}{\log(1 + \alpha)} .$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Na rekurentní relace pro výpočet klasických ortogonálních polynomů můžeme nahlížet jako na diferenční rovnice. Pro Čebyševovy polynomy má rekurentní formule tvar

$$f_{n+2}(x) - 2xf_{n+1}(x) + f_n(x) = 0.$$

Jestliže

$$f_0(x) = 1 \quad f_1(x) = T_1(x) = x,$$

obdržíme Čebyševovy polynomy I. druhu $T_n(x)$.



Řešení diferenciálních rovnic - příklad 2

Jestliže zavedeme označení

$$f_0(x) = 1 \quad f_1(x) = U_1(x) = 2x,$$

obdržíme **Čebyševovy polynomy II. druhu** $U_n(x)$.



Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Ukážeme, jak lze pomocí z transformace řešit diferenční rovnici. S použitím počátečních podmínek odvodíme formule pro Čebyševovy polynomy $T_n(x)$, $U_n(x)$. Použijeme vzorec pro posunutí

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}[f(n+m)] &= z^m \left[\mathcal{Z}[f(n)] - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu)z^{-\nu} \right] = \\ &= z^m \left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu)z^{-\nu} \right].\end{aligned}$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Transformací $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)z^{-n}$ diferenční rovnice obdržíme nejprve rovnici

$$z^2 F(z) - z^2 f_0(x) - z f_1(x) - 2x [zF(z) - z f_0(x)] + F(z) = 0,$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

... kterou upravíme na tvar

$$F(z) \left[1 - 2xz^{-1} + z^{-2} \right] = \left[1 - 2xz^{-1} \right] f_0(x) + z^{-1} f_1(x).$$



Řešení diferenciálních rovnic - příklad 2

Potom pro počáteční podmínky

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = T_1(x) = x$$

obdržíme

$$F(z) \equiv T(z) = \frac{1 - xz^{-1}}{1 - 2xz^{-1} + z^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)z^{-n},$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

zatímco pro počáteční podmínky

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = U_1(x) = 2x$$

je

$$F(z) \equiv U(z) = \frac{1}{1 - 2xz^{-1} + z^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)z^{-n}.$$



Řešení diferenciálních rovnic - příklad 2

V teorii ortogonálních polynomů se funkce $\mathcal{T}(z)$ a $\mathcal{U}(z)$ nazývají vytvořující funkce. Póly těchto funkcí se nacházejí v bodech

$$z_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1} \Big|_{x=\cos \alpha} \equiv e^{\pm j\alpha}.$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Rozkladem na parciální zlomky potom nalezneme

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(z) &= \frac{k_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_2 z^{-1}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 - z_2 z^{-1}}. \end{aligned}$$



Řešení diferenciálních rovnic - příklad 2

Zpětná z - transformace dává známou algebraickou formuli pro Čebyševovy polynomy prvního druhu

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2}z_1^n + \frac{1}{2}z_2^n \\ &= \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n \right], \\ \text{resp.} \\ \cos n\alpha &= \frac{1}{2} (e^{jn\alpha} + e^{-jn\alpha}). \end{aligned}$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Obdobně rozklad funkce $\mathcal{U}(z)$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(z) &= \frac{k_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_2 z^{-1}} \\ &= \frac{z_1}{z_1 - z_2} \frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} - \frac{z_2}{z_1 - z_2} \frac{1}{1 - z_2 z^{-1}}\end{aligned}$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

vede na známou algebraickou formuli pro Čebyševovy polynomy druhého druhu

$$\begin{aligned}
 U_n(x) &= \frac{z_1^{n+1} - z_2^{n+1}}{z_1 - z_2} \\
 &= \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^{n+1} - (x - \sqrt{x^2 - 1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2 - 1}},
 \end{aligned}$$

resp.

$$\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin \alpha} = \frac{e^{j(n+1)\alpha} - e^{-j(n+1)\alpha}}{2j \sin \alpha}$$



Přenosová funkce

Diferenční rovnice lineárního časově invariantního systému, za předpokladu nulových počátečních podmínek, tj. $y(n - k) = 0$ a $u(n - k) = 0$ pro $n - k < 0$, má tvar

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n - k) = \sum_{m=0}^M b_m u(n - m).$$



Přenosová funkce

Použijeme z transformaci

$$\sum_{k=0}^N a_k \mathcal{Z}[y(n-k)] = \sum_{m=0}^M b_m \mathcal{Z}[u(n-m)]$$

a dostáváme algebraickou rovnici

$$\sum_{k=0}^N a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} U(z),$$



Přenosová funkce

ze které můžeme snadno vyjádřit $Y(z)$ ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} U(z) \equiv H(z)U(z).$$



Přenosová funkce

Funkce $H(z)$ je přenosová funkce a má tvar racionální lomené funkce v proměnné z^{-1}

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}} \equiv \frac{Q(z)}{N(z)}$$



