Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

16. května 2013

Obsah

Obsah

Řešení diferenčních rovnic

Diferenční rovnice

$$y(n) - y(n-1) = x(n)$$

je diskrétní obdobou diferencíální rovnice

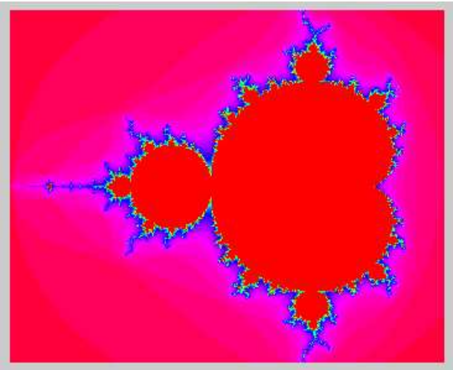
$$\dot{y}(t) = x(t).$$

Uvedená diferenční rovnice je lineární.

Řešení diferenčních rovnic

Nelineární diferenční rovnice se vyskytuje například při iteraci Mandelbrotovy množiny

$$y(n+1) = y^2(n) + z\,.$$



Řešení diferenčních rovnic - příklad 1

Obdrželi jste půjčku $y(0)$ Kč, kterou musíte splácet shodnými splátkami $x(n) = x(0)\,\mathbf{1}(n)$ Kč. Úroková sazba je $\alpha =$11% .

- Nalezněte diferenční rovnici pro dosud nezaplacenou sumu $y(n)$ v každém splatném období.
- Použijte z-transformaci k nalezení posloupnosti $y(n)$.
- Nalezněte vztah pro počet splátek N jestliže znáte hodnoty půjčky, splátky a úrokové sazby.

Řešení diferenčních rovnic - příklad 1

Jestliže

- $y(n)$ je částka, kterou zbývá zaplatit v n-tém splatném období,
- $x(n) = x(0)$ je pravidelná splátka,
- α je úroková míra $\alpha = 0.11 = \frac{11}{100} = 11\%$,

potom platí

$$y(n+1) = (1+\alpha)\, y(n) - x(n)\,.$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 1

Diferenční rovnici upravíme do obvyklého tvaru

$$y(n+1) - (1+\alpha)\,y(n) = -x(n)\,.$$

Transfromací získáme algebraickou rovnici

$$z\,Y(z) - z\,y(0) - (1+\alpha)\,Y(z) = \frac{-x(0)}{1-z^{-1}}$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 1

s řešením

$$Y(z) = \frac{y(0)}{1-(1+\alpha)z^{-1}} - \frac{z^{-1}x(0)}{(1-z^{-1})(1-(1+\alpha)z^{-1})},$$

kterou upravíme na tvar

$$Y(z) = \frac{y(0)}{1-(1+\alpha)z^{-1}} - \frac{x(0)}{\alpha}\left[\frac{1}{(1-(1+\alpha)z^{-1})} - \frac{1}{(1-z^{-1})}\right].$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 1

Inverzní transformací získáme

$$y(n) = y(0)\,(1+\alpha)^n - x(0)\,\frac{(1+\alpha)^n - 1}{(1+\alpha) - 1}$$

$$= y(0)\,(1+\alpha)^n - x(0)\sum_{k=0}^{n-1}(1+\alpha)^k\,.$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 1

Označíme N jako počet splatných období nutný ke splacení vypůjčené částky $y(0)$ splátkami $x(0)$ při úrokové míře α, potom z rovnosti $y(N) = 0$ dostaneme

$$\alpha \frac{y(0)}{x(0)} = \frac{(1+\alpha)^N - 1}{(1+\alpha)^N} = 1 - \frac{1}{(1+\alpha)^N}$$

a odtud

$$N = -\frac{\log\left(1 - \alpha \dfrac{y(0)}{x(0)}\right)}{\log(1+\alpha)} .$$

Pro hodnoty $y(0) = 250\,000$Kč, $x(0) = 5\,000$Kč a $\alpha/12 = 0.085/12 = 0,007083333$ je $N \simeq 62$ měsíců.

Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Na rekurentní relace pro výpočet klasických ortogonálních polynomů můžeme nahlížet jako na diferenční rovnice. Pro Čebyševovy polynomy má rekurentní formule tvar

$$f_{n+2}(x) - 2xf_{n+1}(x) + f_n(x) = 0.$$

Jestliže

$$f_0(x) = 1 \qquad f_1(x) = T_1(x) = x,$$

obdržíme Čebyševovy polynomy I. druhu $T_n(x)$.

Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Jestliže zavedeme označení

$$f_0(x) = 1 \qquad f_1(x) = U_1(x) = 2x,$$

obdržíme Čebyševovy polynomy II. druhu $U_n(x)$.

Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Ukážeme, jak lze pomocí z transformace řešit diferenční rovnici. S použitím počátečních podmínek odvodíme formule pro Čebyševovy polynomy $T_n(x)$, $U_n(x)$. Použijeme vzorec pro posunutí

$$\mathcal{Z}\left[f(n+m)\right] = z^m \left[\mathcal{Z}\left[f(n)\right] - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu) z^{-\nu}\right] =$$

$$= z^m \left[F(z) - \sum_{\nu=0}^{m-1} f(\nu) z^{-\nu}\right] .$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Transformací $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) z^{-n}$ diferenční rovnice obdržíme nejprve rovnici

$$z^2 F(z) - z^2 f_0(x) - z f_1(x) - 2x\,[zF(z) - z f_0(x)] + F(z) = 0\,,$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

... kterou upravíme na tvar

$$F(z)\left[1-2xz^{-1}+z^{-2}\right]=\left[1-2xz^{-1}\right]f_0(x)+z^{-1}f_1(x)\,.$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Potom pro počáteční podmínky

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = T_1(x) = x$$

obdržíme

$$F(z) \equiv \mathcal{T}(z) = \frac{1 - xz^{-1}}{1 - 2xz^{-1} + z^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) z^{-n} ,$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

zatímco pro počáteční podmínky

$$f_0(x) = 1, f_1(x) = U_1(x) = 2\,x$$

je

$$F(z) \equiv \mathcal{U}(z) = \frac{1}{1 - 2xz^{-1} + z^{-2}} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x) z^{-n}.$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

V teorii ortogonálních polynomů se funkce $\mathcal{T}(z)$ a $\mathcal{U}(z)$ nazývají vytvořující funkce. Póly těchto funkcí se nacházejí v bodech

$$z_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 - 1}\Big|_{x=\cos\alpha} \equiv e^{\pm \jmath\alpha}.$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Rozkladem na parciální zlomky potom nalezneme

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(z) &= \frac{k_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_2 z^{-1}} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - z_2 z^{-1}} \, .
\end{aligned}
$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Zpětná z - transformace dává známou algebraickou formuli pro Čebyševovy polynomy prvního druhu

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= \frac{1}{2} z_1^n + \frac{1}{2} z_2^n \\
&= \frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right],
\end{aligned}
$$

resp.

$$
\cos n\alpha = \frac{1}{2}\left(e^{\jmath n\alpha} + e^{-\jmath n\alpha}\right).
$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

Obdobně rozklad funkce $\mathcal{U}(z)$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}(z) &= \frac{k_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_2 z^{-1}} \\
&= \frac{z_1}{z_1 - z_2} \frac{1}{1 - z_1 z^{-1}} - \frac{z_2}{z_1 - z_2} \frac{1}{1 - z_2 z^{-1}}
\end{aligned}
$$

Řešení diferenčních rovnic - příklad 2

vede na známou algebraickou formuli pro Čebyševovy polynomy druhého druhu

$$U_n(x) = \frac{z_1^{n+1} - z_2^{n+1}}{z_1 - z_2} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{2\sqrt{x^2-1}},$$

resp.

$$\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha} = \frac{e^{\jmath(n+1)\alpha} - e^{-\jmath(n+1)\alpha}}{2\jmath\sin\alpha}$$

Přenosová funkce

Diferenční rovnice lineárního časově invariantního systému, za předpokladu nulových počátečních podmínek, tj. $y(n-k) = 0$ a $u(n-k) = 0$ pro $n-k < 0$, má tvar

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m u(n-m)\,.$$

Přenosová funkce

Použijeme z transformaci

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \mathcal{Z}\left[y(n-k))\right] = \sum_{m=0}^{M} b_m \mathcal{Z}\left[u(n-m))\right]$$

a dostáváme algebraickou rovnici

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m} U(z)\,,$$

Přenosová funkce

ze které můžeme snadno vyjádřit $Y(z)$ ve tvaru

$$Y(z) = \frac{\sum\limits_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum\limits_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} U(z) \equiv H(z)U(z)\,.$$

Přenosová funkce

Funkce $H(z)$ je přenosová funkce a má tvar racionální lomené funkce v proměnné z^{-1}

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}} \equiv \frac{Q(z)}{N(z)}$$


Don't
switch!