Modelování systémů a procesů

prof. Miroslav Vlček

15. května 2012

Obsah

1 Přenosová funkce diskrétního systému

2 Vnější a vnitřní popis diskrétního systému

3 Stabilita spojitého a diskrétního systému

Obsah

1. Přenosová funkce diskrétního systému
2. Vnější a vnitřní popis diskrétního systému
3. Stabilita spojitého a diskrétního systému

Obsah

1. Přenosová funkce diskrétního systému
2. Vnější a vnitřní popis diskrétního systému
3. Stabilita spojitého a diskrétního systému

Vztah vstup-výstup

$$\longrightarrow u(n) \boxed{h(n)} y(n) \longrightarrow$$

Vstup-výstup v rovině diskrétního času

$$\longrightarrow U(z) \boxed{H(z)} Y(z) \longrightarrow$$

Vstup-výstup v rovině z

Diferenční rovnice

Na diferenční rovnici

$$a_N y(n+N) + a_{N-1} y(n+N-1) + \ldots a_0 y(n) \\ = b_M u(n+M) + b_{M-1} u(n+M-1) + \ldots b_0 u(n)$$

použijeme z transformaci typu

$$\mathcal{Z}\left[y(n+N)\right] = z^N \left[Y(z) - \sum_{\nu=0}^{N-1} y(\nu) z^{-\nu} \right]$$

Diferenční rovnice

Pokud chceme nalézt odpovídající přenosovou funkci, musíme mít na paměti, že všechny počáteční podmínky

$$y(0) = y(1) = \cdots = y(N-1) = 0$$

a

$$u(0) = u(1) = \cdots = u(M-1) = 0$$

jsou nulové!

Diferenční rovnice a přenosová funkce

Potom z-transformace je jednoduchá

$$(a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \ldots a_0) Y(z)$$
$$= (b_M z^M + b_{M-1} z^{M-1} + \ldots b_0) U(z)$$

Přenosovoá funkce

Přenosová funkce je potom $H(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)}$ a má tvar racionální lomené funkce v proměnné z^{-1}

$$H(z) = \frac{\sum\limits_{m=0}^{M} b_{M-m} z^{-m}}{\sum\limits_{n=0}^{N} a_{N-n} z^{-n}} \equiv \frac{Q(z)}{N(z)} \tag{1}$$

Vztah mezi přenosovou funkcí $H(z)$ a impulsní odezvou $h(n)$ je dán z transformací

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} \,. \tag{2}$$

Vnější a vnitřní popis

Nalezněte přenosovou funkci $H(z)$ diskrétního LTI systému popsaného stavovými rovnicemi

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \mathbf{M}\,x(n) + \mathbf{N}\,u(n) \\ y(n) &= \mathbf{C}\,x(n) \end{aligned}$$

Při odvození použijte z-transformaci ! Která matice ve stavovém popisuje je rozhodující pro stabilitu řešení ?

Vnější a vnitřní popis

S pomocí vztahů pro z-transformaci transformujeme rovnice

$$\begin{aligned} x(n+1) &= \mathbf{M}\,x(n) + \mathbf{N}\,u(n) \\ y(n) &= \mathbf{C}\,x(n) \end{aligned}$$

na

$$\begin{aligned} z(X(z) - x(0)) &= \mathbf{M}\,X(z) + \mathbf{N}\,U(z) \\ Y(z) &= \mathbf{C}\,X(z). \end{aligned}$$

Řešení diferenčních rovnic

Protože přenosová funkce je definována pro $x(0) = 0$, obdržíme z první rovnice

$$X(z) = (z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,U(z)$$

a dosazením do druhé rovnice je

$$Y(z) = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}\,U(z).$$

Přenosová funkce $H(z)$ je tedy

$$\mathbf{H(z)} = \mathbf{C}\,(z\mathbf{1} - \mathbf{M})^{-1}\mathbf{N}.$$

Přenosová funkce a podmínky stability spojitého systému

Přenosová funkce

$$H(p) = \frac{b(m)\,p^m + b(m-1)\,p^{m-1} + \cdots + b(0)}{a(n)\,p^n + a(n-1)\,p^{n-1} + \cdots + a(0)} = \frac{\sum\limits_{\mu=0}^{m} b(\mu)\,p^{\mu}}{\sum\limits_{\nu=0}^{n} a(\nu) p^{\nu}}$$

a její rozklad na parciální zlomky

$$H(p) = \frac{k_1}{p-p_1} + \frac{k_2}{p-p_2} + \cdots + \frac{k_n}{p-p_n}$$

Přenosová funkce a podmínky stability spojitého systému

... umožňuje nalézt impulsní odezvu $h(t)$ pomocí zpětné Laplaceovy transformace

$$h(t) = k_1\, e^{p_1 t} + k_2\, e^{p_2 t} + \cdots + k_n\, e^{p_n t}.$$

Systém nazveme stabilním, jestliže

$$\lim_{t\to\infty} h(t) = 0.$$

a to lze zajistit tak, že všechny póly p_ν leží v levé komplexní polorovině, tj. $\Re(p_\nu) < 0$.

Přenosová funkce a podmínky stability spojitého systému

Příklad 1

Je dána přenosová funkce 5. řádu

$$H(p) = \frac{p^2 + 3\,p^1 + 1}{p^5 + 6\,p^4 + 9\,p^3 + 8\,p^2 + 6\,p^1 + 1} = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Použijte příkaz v MATLABu

```
A=[1 6 9 8 6 1]
p=roots(A)'
```

Přenosová funkce a podmínky stability spojitého systému

s výsledkem

```
p=[-4.2503 -1.2471 -0.1434+i0.9240
-0.1434-i0.9240 -0.2158]
```

Všechny póly mají zápornou reálnou část, leží tedy v levé polorovině a systém je stabilní.

Přenosová funkce a podmínky stability diskrétního systému

Přenosová funkce

$$H(z) = \frac{b(m)\,z^{-m} + b(m-1)\,z^{-m+1} + \cdots + b(0)}{a(n)\,z^{-n} + a(n-1)\,z^{-n+1} + \cdots + a(0)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} h(\nu) z^{-\nu}$$

a její rozklad na parciální zlomky

$$H(z) = \frac{k_1}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{k_2}{1 - z_2 z^{-1}} + \cdots + \frac{k_n}{1 - z_n z^{-1}}$$

Přenosová funkce a podmínky stability diskrétního systému

... umožňuje nalézt impulsní odezvu $h(\nu)$ pomocí zpětné z transformace

$$h(\nu) = k_1\, z_1^{\nu} + k_2\, z_2^{\nu} + \cdots + k_n\, z_n^{\nu}.$$

Systém nazveme stabilním, jestliže

$$\lim_{\nu \to \infty} h(\nu) = 0.$$

a to lze zajistit tak, že všechny póly $z_\nu = u_\nu + i v_\nu$ leží uvnitř jednotkové kružnice, tj. $|z_\nu| = \sqrt{u_\nu^2 + v_\nu^2} < 1$.

Přenosová funkce a podmínky stability diskrétního systému

Příklad 2

Je dána přenosová funkce 3. řádu

$$H(z) = \frac{0.2\,z^{-1} + 0.1\,z^{-2}}{1 - 1.5\,z^{-1} + 0.8\,z^{-2} + 0.2\,z^{-3}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Použijte příkazy v MATLABu

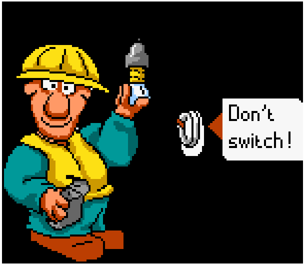
```
A=[1 -1.5 0.8 0.2]
zn=abs(roots(A))'
```

Přenosová funkce a podmínky stability diskrétního systému

s výsledkem

```
zn=[1.0509 1.0509 0.1811]
```

Dva póly mají absolutní hodnotu větší než jedna, neleží tedy v jednotkové kružnici a systém je nestabilní.


Don't
switch!