Dominance a vzdálenost v grafech

Algoritmy teorie grafů

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

March 30, 2021

Dominance

$\mathbf{G} = (V, E) \ldots$ neorientovaný neohodnocený graf

- podmnožina vrcholů $D \subseteq V$ je dominující (nebo dominuje) grafu $\mathbf{G} \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow$ každý vrchol z V je buď v D,
  nebo sousedí aspoň s jedním vrcholem z D
- minimální dominující množina: žádná její vlastní podmnožina není dominující
- dominance grafu = počet prvků nejmenší minimální dominující množiny
- značení: $dom(\mathbf{G})$

Odhady dominance

- $\delta_{max}(\mathbf{G})$... největší stupeň vrcholu v $\mathbf{G}$
- $\kappa(\mathbf{G})$... vrcholová souvislost grafu (velikost nejmenší množiny vrcholů, po jejichž odstranění graf přestane být souvislý)
- n... počet vrcholů

pokud $\mathbf{G}$ nemá izolované vrcholy, pak $dom(\mathbf{G}) \leq \frac{n}{2}$

$$\left\lceil \frac{n}{1 + \delta_{max}(\mathbf{G})} \right\rceil \leq dom(\mathbf{G})$$

$$dom(\mathbf{G}) \leq n - \delta_{max}(\mathbf{G})$$

$$dom(\mathbf{G}) \leq n - \kappa(\mathbf{G})$$

Průměr grafu

- excentricita vrcholu: vzdálenost od nejvzdálenějšího vrcholu: $exc(v) = \max_{x \in V}\{d(v,x)\}$
- diametr (průměr) grafu: maximální excentricita vrcholu $diam(\mathbf{G}) = \max_{x \in V}\{exc(x)\} = \max_{x,y \in V}\{d(x,y)\}$
- rádius grafu: minimální excentricita vrcholu $rad(\mathbf{G}) = \min_{x \in V}\{exc(x)\}$
- centrální vrchol: vrchol s minimální excentricitou, tj. $exc(v) = rad(\mathbf{G})$
- centrum grafu: podgraf $Z(\mathbf{G})$ indukovaný množinou centrálních vrcholů
- periferní vrchol: vrchol s maximální excentricitou, tj. $exc(v) = diam(\mathbf{G})$
- periferie grafu: podgraf $per(\mathbf{G})$ indukovaný množinou periferních vrcholů

Vlastnosti

Pro souvislý graf **G** platí:

$$rad(\mathbf{G}) \leq diam(\mathbf{G}) \leq 2rad(\mathbf{G})$$

- blok: největší souvislý podgraf, který neobsahuje žádnou artikulaci

Centrum souvislého grafu leží uvnitř jediného bloku
nebo není součástí žádného.