

Obarvení grafu

Algoritmy teorie grafů

Lucie Kárná

karna@fd.cvut.cz

March 16, 2021

Triviální horní a dolní odhad

$\mathbf{G} = (V, E)$... neorientovaný prostý graf bez smyček,

$n = |V|$... počet vrcholů

Horní odhad

$$\chi(\mathbf{G}) \leq n$$

Klika v grafu \mathbf{G} je maximální podgraf, který je úplným grafem.

Počet vrcholů v největší klice nazýváme **klikovost grafu**, značíme $\omega(\mathbf{G})$.

Dolní odhad

$$\chi(\mathbf{G}) \geq \omega(\mathbf{G})$$

Souvislost barevnosti a nezávislosti grafu

$\mathbf{G} = (V, E)$... neorientovaný prostý graf bez smyček,
 $n = |V|$... počet vrcholů

Dolní odhad

$$\chi(\mathbf{G})\alpha(\mathbf{G}) \geq n$$

Horní odhad

$$\chi(\mathbf{G}) + \alpha(\mathbf{G}) \leq n + 1$$

Důkaz:

- nejpočetnější nezávislou množinu obarvíme první barvou
- zbývá obarvit $n - \alpha(\mathbf{G})$ vrcholů, na ně stačí $n - \alpha(\mathbf{G})$ barev
- $\Rightarrow \chi(\mathbf{G}) \leq 1 + n - \alpha(\mathbf{G})$.

Barevnost některých typů grafů

G ... neorientovaný prostý graf bez smyček

- $\chi(\mathbf{G}) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ je diskrétní
- \mathbf{G} je kružnice sudé délky $\Rightarrow \chi(\mathbf{G}) = 2$
- \mathbf{G} je kružnice liché délky $\Rightarrow \chi(\mathbf{G}) = 3$
- $\chi(\mathbf{G}) = 2 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ neobsahuje kružnici liché délky
- $\chi(\mathbf{G}) = 2 \Leftrightarrow \mathbf{G}$ je bipartitní
- \mathbf{G} je strom $\Rightarrow \chi(\mathbf{G}) = 2$
- $\chi(\mathbf{K}_n) = n$

Barevnost rovinného grafu

Rovinný graf bez smyček lze obarvit čtyřmi barvami.

Přístup k problému obarvení grafu

Princip: *backtracking* – prohledáváme stavový prostor možných obarvení postupem 'do hloubky'

- vrcholy očísujeme $1, 2, \dots, n$
- \Rightarrow obarvení je posloupnost barev (= čísel)
- pro každý vrchol x definujeme:
 - ▶ $V(x)$... množina sousedů x
 - ▶ $P(x) = V(x) \cap \{1, 2, \dots, x - 1\}$
- Proměnné:
 - ▶ Barva ... nejlepší dosud nalezené obarvení (vektor délky n)
 - ▶ B ... aktuální (rozpracované) částečné obarvení (vektor délky n)
 - ▶ Omez ... číslo barvy, kterou se už snažíme nepoužít (tj. počet barev v proměnné Barva)

Algoritmus pro obarvení grafu

- 1 *inicializace*
- 2 *postup vpřed*: barvíme další vrcholy
 - ▶ všechny vrcholy obarveny \Rightarrow GOTO 3
 - ▶ došly barvy \Rightarrow GOTO 4
- 3 *graf je obarven*.; zkusíme obarvení vylepšit
- 4 *návrat*: zkusíme snížit barvu v posledním vrcholu y
 - ▶ y má nejnižší možnou barvu \Rightarrow musíme změnit předchozí sekvenci
 - ▶ couváme, dokud nenajdeme vrchol, v němž má smysl barvu zvýšit
 - ▶ nemá smysl zvyšovat barvu ve vrcholu 1 (záměna barev)
 - ▶ podobně nemá smysl, aby barva vrcholu x byla větší než x
 - ▶ pokud takový vrchol neexistuje \Rightarrow KONEC
 - ▶ pokud existuje \Rightarrow GOTO 2

Algoritmus pro obarvení grafu – inicializace

1 inicializace:

- ▶ $x := 1$
- ▶ $B(x) := 1$ % obarvení prvního vrcholu první barvou
- ▶ $Omez := n + 1$ % n je počet vrcholů

2 postup vpřed

3 graf je obarven

4 návrat

- ▶ je nejlepší \Rightarrow KONEC
- ▶ jde vylepšit \Rightarrow GOTO 2

Algoritmus pro obarvení grafu – postup vpřed

① *inicializace*

② *postup vpřed:*

- ▶ $x := x + 1$
 % barvíme další vrchol
- ▶ $x > n \Rightarrow \text{GOTO } 3$
 % všechny vrcholy obarveny
- ▶ $B(x) := \min\{\text{všechny barvy, nepoužité v } P(x)\}$ % obarvíme
- ▶ pokud $B(x) \geq 0$ mez % došly barvy
 - ★ $y := x$
 - ★ GOTO 4
- ▶ pokračujeme GOTO 2

③ *graf je obarven*

④ *návrat*

- ▶ je nejlepší \Rightarrow KONEC
- ▶ jde vylepšit \Rightarrow GOTO 2

Algoritmus pro obarvení grafu – graf je obarven

① *inicializace*

② *postup vpřed*

- ▶ pokud neexistuje \Rightarrow GOTO 4

③ *graf je obarven:*

- ▶ pro všechny vrcholy: $\text{Barva}(x) := B(x)$
% máme nové, lepší obarvení
- ▶ $\text{Omez} := \max(\text{Barva})$
% nová horní mez pro počet barev
- ▶ $y :=$ první vrchol, který má barvu Omez
- ▶ pokračujeme bodem 4
% zkusíme najít ještě lepší obarvení

④ *návrat:*

- ▶ je nejlepší \Rightarrow KONEC
- ▶ jde vylepšit \Rightarrow GOTO 2

Algoritmus pro obarvení grafu – návrat

- 1 *inicializace*
- 2 *postup vpřed*
- 3 *graf je obarven*
- 4 *návrat*: pokus o snížení barvy ve vrcholu y
 - ▶ $x :=$ poslední vrchol z $P(y)$
- 5
 - ▶ je-li $x = 1 \Rightarrow$ KONEC % není kam dál couvat
 - ▶ $\mathbf{b} := \min \{ \text{barvy větší než } B(x), \text{ kterými není obarvený žádný vrchol z } P(x) \}$
 - ▶ pokud $\mathbf{b} < 0$ mez a zároveň $\mathbf{b} \leq x$, pak
 - ★ $B(x) := \mathbf{b}$ % přebarvíme
 - ★ GOTO 2 % a zkusíme znovu
 - ▶ jinak
 - ★ $x := x - 1$ % couváme dál
 - ★ GOTO 5

Příklad

