České vysoké učení technické v Praze
Fakulta dopravní
Katedra aplikované matematiky

Teorie grafů

Mgr. Lucie Kárná, PhD

Vývojová verze skripta

23. února 2018

Obsah

1 Úvod **5**
1.1 Co ještě chybí 5
1.2 Co to jsou grafy? 5
1.3 Orientovaný a neorientovaný graf 5
1.4 Způsoby reprezentace grafu 8
1.4.1 Grafická reprezentace 8
1.4.2 Popis grafu seznamem 8
1.4.3 Maticové reprezentace grafu 8
1.5 Stupeň vrcholu 9
1.6 Souvislost grafu 9
1.6.1 Sledy a příbuzné pojmy 9
1.6.2 Souvislost grafu 10

2 Eulerovské grafy **11**

3 Stromy a kostry **12**
3.1 Stromy 12
3.2 Ohodnocený graf 12
3.3 Minimální kostra grafu 13
3.3.1 Hladový algoritmus 13
3.3.2 Jarníkův algoritmus 13
3.3.3 Borůvkův algoritmus 13
3.4 Kořenový strom 13

4 Prohledávání grafu **15**

5 Minimální dráha **16**
5.1 Dijkstrův algoritmus pro minimální dráhu 17

6 Toky v síti **19**
6.1 Dopravní síť 19
6.2 Tok v síti 20
6.3 Řezy 21
6.4 Nalezení maximálního toku 22
6.4.1 Zlepšující cesta 22
6.4.2 Ford-Fulkersonův algoritmus 24

Seznam použitých symbolů

$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$A \setminus B$	rozdíl množin A a B
$G = (V, E)$	graf (viz kapitola 1.3)
V	množina vrcholů grafu
$\|V\|$	velikost množiny V, tj. počet vrcholů grafu
V^2	množina všech uspořádaných dvojic prvků množiny V
$[V]^2$	množina všech neuspořádaných dvojic prvků množiny V
E	množina hran grafu
$\|E\|$	velikost množiny E, tj. počet hran grafu
$E^+(v)$	množina hran vycházejících z vrcholu v
$E^-(v)$	množina hran, které končí ve vrcholu v
$A = (a_{ij})$	matice délek hran grafu (viz kapitola 3.2)
$B = (b_{ij})$	incidenční matice grafu (viz kapitola 1.4.3)
$M = (m_{ij})$	matice sousednosti grafu (viz kapitola 1.4.3)
$U = (u_{ij})$	matice vzdáleností ohodnoceného grafu (viz kapitola 5)
$\mathrm{d}^-(v)$	vstupní stupeň vrcholu v (viz kapitola 1.5)
$\mathrm{d}^+(v)$	výstupní stupeň vrcholu v (viz kapitola 1.5)
$\mathrm{d}(v)$	stupeň vrcholu v (viz kapitola 1.5)
$\|t\|$	velikost toku t od zdroje ke spotřebiči (viz kapitola 6.2)
$W(A)$	řez určený množinou A (viz kapitola 6.3)
$C(A)$	kapacita řezu určeného množinou A (viz kapitola 6.3)
$\|t\|_A$	velikost toku přes řez určený množinou A (viz kapitola 6.3)

Předmluva

Tato skripta vznikla jako učební text k předmětu Lineární algebra pro posluchače prvního ročníku dopravní fakulty. Do předmětu Lineární algebra je na této fakultě poněkud netypicky zařazen i úvod do teorie grafů, který tvoří zhruba třetinu obsahu přednášek.

Přestože pro teorii grafů existuje velké množství dostupné literatury i poměrně kvalitních on-line zdrojů, pociťovali studenti absenci přehledného textu, který by byl zaměřen přesně na jejich potřeby. Tento nedostatek se pokouším napravit.

Účelem skript je dán i jejich obsah a rozsah, jenž se omezuje pouze na vybrané části teorie grafů, které jsou pro studenty dopravní fakulty nejpodstatnější. Mnohé důležité partie byly úmyslně zcela opomenuty. Případným vážnějším zájemncům o teorii grafů doporučuji seznam literatury na konci skript.

Kapitola 1

Úvod

Pojmy: graf, vrchol, hrana, smyčka, orientovaná a neorientovaná hrana, násobné hrany, prostý graf, multigraf, orientovaný a neorientovaný graf. Matice sousednosti, incidenční matice. Vstupní a výstupní stupeň vrcholu. Sled, dráha, cesta, tah, cyklus, kružnice. Souvislost, slabá a silná souvislost, komponenta.

1.1 Co ještě chybí

- symetrizace grafu
- podgraf, faktor

1.2 Co to jsou grafy?

Pojem "graf" má celou řadu významů, a to i rámci samotné matematiky. Teorie grafů se nezabývá ani grafy funkcí, ani koláčovými či sloupcovými grafy, využívanými ve statistice. "Grafem" se v teorii grafů rozumí množina bodů a čar, které je spojují, jako na obrázku 1.1. Takový graf může popisovat širokou škálu situací a problémů:

Grafy si můžeme představit jako zjednodušení reálného světa, kde studovaný problém znázorníme pomocí bodů a čar, které je spojují, a tím popisují vztahy mezi nimi. Takovým bodům pak v teorii grafů říkáme vrcholy grafu a čáry, které je spojují, nazýváme hrany grafu.

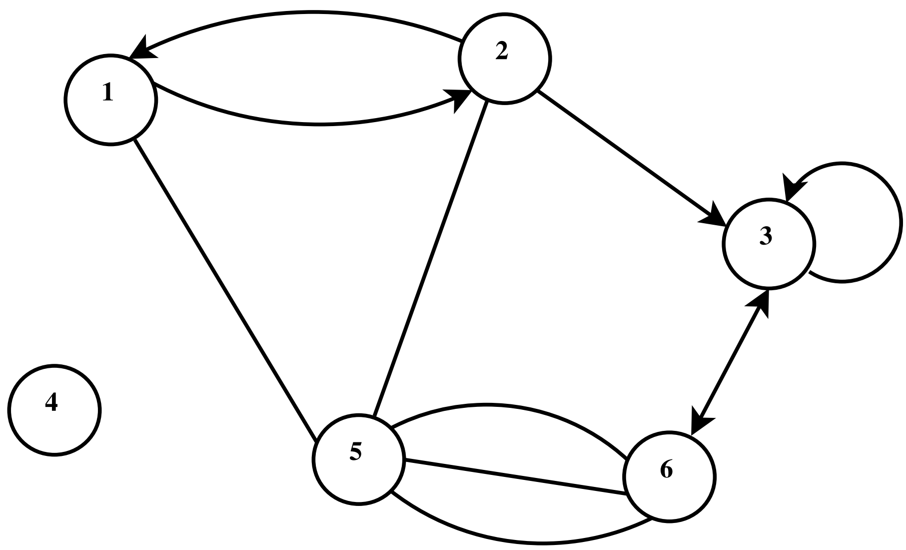
1.3 Orientovaný a neorientovaný graf

Nyní se pokusíme precizovat naši představu o grafech a formulovat jejich exaktní definici.

Graf G je uspořádaná dvojice dvou množin $G = (V, E)$, kde prvky množiny V nazýváme *vrcholy* (někdy se ve stejném smyslu používá termín *uzly*) a prvky množiny E nazýváme *hrany* (někdy též *žebra*)[1]. Množina hran E je přitom podmnožinou sjednocení množin $V^2 \cup [V]^2 \cup V$, kde

[1] Označení množin V a E pocházejí z anglických slov *vertex* (pl. *vertices*) – vrchol a *edge* – hrana.

- V^2 je množina všech uspořádaných dvojic vrcholů z množiny V, a
- $[V]^2$ je množina všech neuspořádaných dvojic (tj. dvouprvkových podmnožin) vrcholů z množiny V.



Obrázek 1.1: Příklad obecného grafu.

U hrany, které náleží do množiny všech **uspořádaných** dvojic vrcholů V^2, můžeme rozlišit jejich "první" a "druhý" vrchol (čili "začátek" a "konec"); tyto hrany nazýváme *orientované* a reprezentujeme je čárou se šipkou. Na obrázku 1.1 jsou orientovanou hranou spojeny vrcholy 2 a 3. Říkáme, že

Mezi vrcholy 1 a 2 existují dvě orientované hrany: jedna vede z vrcholu 1 do vrcholu 2 a druhá z vrcholu 2 do vrcholu 1. Stejně tak existují dvě orientované hrany mezi vrcholy 3 a 6, na obrázku jsou však zakresleny jako jedna čára se šipkami na obou koncích. Oba tyto způsoby znázornění jsou ekvivalentní a znamenají totéž. Můžeme používat libovolný z nich, podle toho, který se nám zdá přehlednější, není však vhodné je kombinovat v jednom obrázku.

U hran z množiny $[V]^2$ **neuspořádaných** dvojic mají oba vrcholy stejné postavení; tyto hrany nazýváme *neorientované* a reprezentují se spojnicí bez šipek. Na obrázku 1.1 jsou neorientovanou hranou spojeny například vrcholy 2 a 5 nebo vrcholy 1 a 5.

Mezi vrcholy 5 a 6 existují tři různé neorientované hrany. Graf, ve kterém existují takové *násobné* hrany, se nazývá *multigraf.* V tomto skriptu se nebudeme multigrafy zabývat a budeme pracovat pouze s grafy *prostými*, ve kterých mezi každými dvěma vrcholy existuje nejvýše jedna hrana. Přitom dvě orientované hrany, které spojují dva vrcholy v opačných směrech, nepovažujeme za násobné a situace, jaká je mezi vrcholy 1 a 2, se tedy může vyskytnout i v prostém grafu.

Hrany z množiny V mají stejný počáteční i koncový vrchol — jsou to *smyčky*; na obrázku 1.1 je smyčka u vrcholu 3. Nadále se budeme zabývat pouze grafy bez smyček (někdy se označují jako grafy *obyčejné*).

Skutečnost, že vrchol V je krajním bodem hrany E, tj. buď $E = \{V, V'\}$ nebo $E = [V, V']$ nebo $E = [V', V]$ nebo $E = \{V\}$, vyjadřujeme termínem *vrchol* V *inciduje s hranou* E nebo *hrana* E *inciduje s vrcholem* V. Vrchol 4 na obrázku 1.1 neinciduje s žádnou hranou. Je zde pro zdůraznění skutečnosti, že i taková situace může nastat. Na druhé straně nemůže existovat hrana, která neinciduje s žádným vrcholem.

I když nebudeme připouštět násobné hrany a smyčky, může být obecný graf pořád ještě příliš komplikovaný. Proto se budeme zabývat pouze dvěma skupinami grafů:

- grafy *orientovanými*, které mají všechny hrany orientované, a
- grafy *neorientovanými*, které mají všechny hrany neorientované.

Grafy *smíšené*, které obsahují oba typy hran, nebudeme uvažovat. To ve skutečnosti není příliš omezující, protože každý graf můžeme popsat jako orientovaný prostě tak, že každou neorientovanou hranu $\{V_1, V_2\}$ nahradíme dvojicí orientovaných hran $[V_1, V_2]$ a $[V_2, V_1]$. V obrázku to znamená, že každou neorientovanou hranu opatříme na každém konci šipkou.

Na druhé straně každý graf indukuje neorientovaný graf, který vznikne nahražením každé orientované hrany neorientovanou (a odstraněním násobných hran, které tím případně vzniknou). V obrázku to znamená vymazání všech šipek. Při tomto postupu se samozřejmě ztrácí část informace, ale pro některé aplikace jsou neorientované grafy praktičtější.

Tím se dostáváme k formulaci základních definic grafů:

Definice: *Orientovaný prostý graf bez smyček* G je uspořádaná dvojice množin $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a množina hran E je podmnožinou množiny V^2 všech uspořádaných dvojic vrcholů.

Orientované grafy se používají hlavně k popisu vztahů, které jsou svojí podstatou asymetrické: A je nadřízený B, činnost A může začít po ukončení činnosti B, skupina A je podskupinou skupiny B, družstvo A na turnaji porazilo družstvo B a podobně.

Definice: *Neorientovaný prostý graf bez smyček* G je uspořádaná dvojice množin $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a množina hran E je podmnožinou množiny $[V]^2$ všech dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů V.

Neorientované grafy jsou vhodné pro popis symetrických vztahů: A sousedí s B, A je vodivě spojeno s B, postavy A a B se objeví na jevišti zároveň a podobně.

Jen malé zaváhání může přinést popis situace, kdy není zcela zřejmé, jedná-li se o zcela symetrický vztah, například “z místa A vede přímá cesta do místa B”. Většinou by mohl stačit neorientovaný graf, ale co když tam budou nějaké jednosměrky? Řešení je snadné: pokud se v systému vyskytuje (nebo se potenciálně může vyskytnout) alespoň jedno místo, které je potřeba popsat orientovanou hranou, použijeme k popisu celého systému orientovaný graf.

Stejně tak použijeme orientovaný graf tehdy, pokud jsme na pohybách o struktuře systému. Jak jsme již uvedli, orientovaný graf je obecnější než neorientovaný, takže s jeho pomocí dospějeme k výsledku i v případě, že by stačil graf neorientovaný. Přinejhorším bude postup pracnější.

Pozor: od tohoto bodu nemám skripta dopsaná, uvádím jen definice, věty a stručné poznámky.

1.4 Způsoby reprezentace grafu

1.4.1 Grafická reprezentace

Nejpřirozenějším způsobem reprezentace grafů je reprezentace grafická, stručně řečeno obrázek. Přesným matematickým popisem "obrázku" se nebudeme zabývat, jen stručně shrneme:

- vrcholy znázorňujeme body, tečkami či puntíky, případně kroužky (ty jsou vhodné v případě, že potřebujeme vrcholy nějak pojmenovat, protože toto pojmenování pak úhledně vepíšeme do kroužku),
- neorientované hrany se znázorňují jako spojnice dvou vrcholů; tato spojnice může být rovná, zakřivená i lomená a hrany se mohou křížit (vždy se ovšem snažíme o přehlednost),
- orientované hrany jsou spojnice dvou vrcholů se šipkou na jednom konci; dvě protisměrné šipky mezi jednou dvojicí vrcholů lze nahradit jednou spojnicí se šipkami na obou koncích.

Graf je vhodné znázornit obrázkem v případě, kdy s ním bude pracovat člověk. Je to znázornění přirozené a určitou informaci z něj může získat i jedinec, který není s teorií grafů nijak obeznámen. Pro rozsáhlejší grafy je však již nepřehledné. Při zpracování na počítači není grafická reprezentace vhodná.

1.4.2 Popis grafu seznamem

Seznam vrcholů a seznam hran:
$V = \{1, 2, 3, 4\}$
$E = \{[1, 2], [3, 2], [1, 3], [3, 4], [4, 3]\}$

Seznam sousedů: $V = \{1 : 2, 3; 2 : \emptyset; 3 : 2, 4; 4 : 3\}$

1.4.3 Maticové reprezentace grafu

V … množina vrcholů —V— … velikost množiny vrcholů, tedy počet vrcholů (číslo)
E … množina hran —E— … velikost množiny hran, tedy počet hran (číslo)

Matice sousednosti je matice $M = (m_{ij})$ typu $|V| \times |V|$, definovaná vztahem
$m_{ij} = 1$, pokud $[v_i, v_j] \in E$, a
$m_{ij} = 0$ jinak.

Na diagonále matice sousednosti jsou nuly (jinak by v příslušném vrcholu existovala smyčka). Matice sousednosti neorientovaného grafu je symetrická.

Incidenční matice orientovaného grafu je matice $B = (b_{ij})$ typu $|V| \times |E|$, definovaná vztahem

$b_{ij} = 1$, jestliže v_i je počátečním vrcholem hrany e_j,
$b_{ij} = -1$, jestliže v_i je koncovým vrcholem hrany e_j a
$b_{ij} = 0$ jinak.
V každém sloupci je právě jedna 1 a jedna -1.

Incidenční matice neorientovaného grafu je matice $B = (b_{ij})$ typu $|V| \times |E|$, definovaná vztahem
$b_{ij} = 1$, jestliže vrchol v_i inciduje s hranou e_j a
$b_{ij} = 0$ jinak.
V každém sloupci jsou právě dvě 1.

1.5 Stupeň vrcholu

Stupeň vrcholu $\mathrm{d}(v)$, $\deg(v)$ je počet hran, které s vrcholem v incidují.

Orientovaný graf:
vstupní stupeň vrcholu $\mathrm{d}^-(v)$ je počet hran vstupujících do vrcholu v,
výstupní stupeň vrcholu $\mathrm{d}^+(v)$ je počet hran vystupujících z vrcholu v.
Platí: $\mathrm{d}(v) = \mathrm{d}^-(v) + \mathrm{d}^+(v)$.

Určení stupně:

- obrázek – zřejmé
- matice sousednosti:
  - $\mathrm{d}^+(v)$ = počet jedniček v řádku
  - $\mathrm{d}^-(v)$ = počet jedniček v sloupci
  - neorientovaný graf: $\mathrm{d}(v)$ = počet jedniček v řádku = počet jedniček ve sloupci
- incidenční matice:
  - $\mathrm{d}^+(v)$ = počet jedniček v řádku
  - $\mathrm{d}^-(v)$ = počet -1 v řádku
  - $\mathrm{d}(v)$ = počet nenulových prvků v řádku

1.6 Souvislost grafu

1.6.1 Sledy a příbuzné pojmy

1.6.1.1 V orientovaném grafu

Sled (těř *orientovaný sled*) je posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$, ve kterém každá hrana e_i vede z vrcholu v_{i-1} do vrcholu v_i ($e_i = [v_{i-1}, v_i]$).

Orientovaný sled, v němž se neopakuje žádná hrana, je *dráha* (též *orientovaná cesta*).
Uzavřená dráha (tj. $v_0 = v_n$) se nazývá *cyklus*.

1.6.1.2 V neorientovaném grafu

Neorientovaný sled je posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$, ve kterém každá hrana e_i spojuje vrcholy v_{i-1} a v_i. ($e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$).

Neorientovaný sled, v němž se neopakuje žádná hrana, je *cesta* (též *neorientovaná cesta*).
Uzavřená neorientovaná cesta (tj. $v_0 = v_n$) se nazývá *kružnice*.

Orientovaný i neorientovaný sled, v němž se neopakuje žádný vrchol (nanejvýš může být $v_0 = v_n$), je *tah*.

1.6.2 Souvislost grafu

1.6.2.1 Souvislost v neorientovaném grafu

Neorientovaný graf je *souvislý*, právě když každé dva vrcholy jsou spojeny neorientovanou cestou.

Největší možný souvislý podgraf grafu se nazývá *komponenta souvislosti* (případně *souvislá komponenta*) grafu.

1.6.2.2 Souvislost v orientovaném grafu

Orientovaný graf je *slabě souvislý*, je-li jeho symetrizace souvislá.

Orientovaný graf je *silně souvislý*, když pro každou dvojici vrcholů u a v existuje orientovaná cesta z u do v i z v do u (obě cesty mohou vést jinudy).

Kapitola 2

Eulerovské grafy

Eulerovy jednotažky.

Kapitola 3

Stromy a kostry

Pojmy: strom, les, list, kostra grafu. Ohodnocený graf, délka (cena) hrany, matice délek hran. Minimální kostra grafu, hladový algoritmus, Jarníkův algoritmus, Borůvkův algoritmus. Kořenový strom, kořen, otec, syn, předek, potomek, hloubka vrcholu, vrstva. Binární strom.

3.1 Stromy

Neorientovaný souvislý graf, kkterý neobsahuje kružnici, nazveme *strom.* (Není-li souvislý, je to *les.*)

Vrchol stupně 2 je *list.*

Každý strom s alespoň dvěma vrcholy obsahuje alespoň dva listy.

Každý strom o n vrcholech má přesně $n-1$ hran: $|E| = |V| - 1$.

G je graf s $n \geq 1$ vrcholy. Pak je ekvivalentní:

- G je strom.
- G je souvislý a odebráním libovolné hrany přestane být souvislý.
- G je souvislý a má přesně $n-1$ hran.
- G neobsahuje kružnici a má přesně $n-1$ hran.
- Každá dvojice vrcholů je spojená právě jednou neorientovanou cestou.
- ...

Každý souvislý graf má faktor, který je stromem.

Faktor grafu, který je stromem, nazýváme *kostra grafu.*

3.2 Ohodnocený graf

Ohodnocený graf (případně přesněji *hranově ohodnocený graf*) je uspořádaná trojice $G = (V, E, \varphi)$, kde dvojice (V, E) je graf a φ je funkce $E \to \mathbb{R}$, která každé hraně z E

přiřadí reálné číslo. Funkce φ se nazývá *ohodnocení grafu*, hodnota $\varphi(e)$ je *ohodnocení hrany E*, často interpretovaná jako *délka hrany* nebo *cena hrany*.

Definice stejná pro orientovaný i neorientovaný graf.

Matice délek hran orientovaného grafu je matice $A = (a_{ij})$ typu $|V| \times |V|$, definovaná vztahem

- $a_{ij} = \varphi(e)$, jestliže z v_i do v_j vede hrana e, jejíž délka je $\varphi(e)$,
- $a_{ij} = 0$ pro $i = j$,
- $a_{ij} = \infty$, jestliže z v_i do v_j nevede žádná hrana (a $i \neq j$).

Neorientovaný graf stejně.

Seznam vrcholů a hran: hrana je zapsána jako $(v_i, v_j, \varphi(v_i, v_j))$.

3.3 Minimální kostra grafu

Mějme ohodnocený graf $G = (V, E, \varphi)$, který je souvislý. Kostra grafu G je jeho *minimální kostra*, jestliže má nejmenší součet ohodnocení hran ze všech koster grafu G.

Příklad: graf = silniční síť, ohodnocení = náklady na odklizení sněhu z daného úseku, minimální kostra = nejlevnější část sítě, která bude v zimě udržována.

Nalezení minimální kostry:

3.3.1 Hladový algoritmus

1. Seřadíme hrany od nejkratší k nejdelší ($\varphi(e_1) \leq \varphi(e_2) \leq \cdots \leq \varphi(e_n)$).
2. Procházíme hrany v tomto pořadí; do kostry přidáme jen ty, které nezpůsobí vznik kružnice.

Nejjednodušší, ale nikoliv nejrychlejší.

3.3.2 Jarníkův algoritmus

3.3.3 Borůvkův algoritmus

3.4 Kořenový strom

Rodokmen, hierarchické vztahy, ...

Kořenový strom je orientovaný graf, v němž existuje význačný vrchol $r \in V$, zvaný *kořen*, takový, že

- do r nevede žádná hrana,
- do každého jiného vrcholu vede právě jedna hrana,
- z kořene existuje orientovaná cesta do každého vrcholu.

Do každého vrcholu vede z kořene **právě jedna** orientovaná cesta.

Symetrizace kořenového stromu je strom.

Otec, syn, předek, potomek.

Každý vrchol kromě kořene má právě jednoho otce (kořen nemá žádného otce).

Hloubka vrcholu v je počet hran v cestě z kořene do vrcholu v. *Vrstva* je množina vrcholů, které mají stejnou hloubku.

Binární strom je kořenový strom, ve kterém má každý vrchol nejvýše dva syny.

Kapitola 4

Prohledávání grafu

Kořenový strom. Prohledání grafu do šířky a do hloubky.

Kapitola 5

Minimální dráha

Pojmy: Délka dráhy, vzdálenost vrcholů, matice vzdáleností, minimální dráha, trojúhelníková nerovnost, kořenový strom nejkratších drah, Dijkstrův algoritmus pro nalezení minimální dráhy.

$G = (V, E, \varphi)$ je ohodnocený orientovaný graf, $\varphi(e)$ je délka hrany e. Připomínám, že dráha je orientovaný sled, v němž se neopakuje žádná hrana.

Délka dráhy = součet délek hran tvořících dráhu.

Vzdálenost z vrcholu v do vrcholu v' je délka $u(v, v')$ nejkratší dráhy vedoucí z v do v', pokud taková dráha existuje. Jestliže z vrcholu v nevede žádná dráha do vrcholu v', klademe $u(v, v') = \infty$.

Matice vzdáleností grafu $G = (V, E, \varphi)$ je matice $U = (u_{ij})$ typu $|V| \times |V|$, kde $u_{ij} = u(v_i, v_j)$.

Úloha o minimální dráze: V ohodnoceném orientovaném grafu $G = (V, E, \varphi)$ nalézt nejkratší dráhu

- ze startu do cíle nebo
- ze startu do všech vrcholů grafu.

První z úkolů se řeší pomocí algoritmů pro druhý.

Smysl mají i záporné délky hran (například jsou-li $\varphi(e)$ náklady na průchod hranou e, mohou být i záporné, pokud za průchod některou hranou dostanu zaplaceno třeba za převoz nákladu). Algoritmy pro takové případy jsou složitější; proto se omezíme pouze na případy, kdy je $\varphi(e) \geq 0$ pro všechny hrany $e \in E$.

Věta 5.1 *Nechť je $G = (V, E, \varphi)$ orientovaný ohodnocený graf, ve kterém pro všechny hrany $e \in E$ platí $\varphi(e) \geq 0$. Pak pro všechny trojice vrcholů $v_1, v_2, v_3 \in V$ platí* trojúhelníková nerovnost*:*

$$u(v_1, v_2) \leq u(v_1, v_3) + u(v_3, v_2).$$

Důsledek: V orientovaném ohodnoceném grafu, ve kterém je $\varphi(e) \geq 0$ pro všechny hrany $e \in E$, platí pro všechny trojice vrcholů $v_1, v_2, v_3 \in V$

Obrázek 5.1: Trojúhelníková nerovnost.

- $u(v_1, v_2) \leq \varphi(v_1, v_2)$,
- $u(v_1, v_2) \leq u(v_1, v_3) + \varphi(v_3, v_2)$,
- $u(v_1, v_2) \leq \varphi(v_1, v_3) + u(v_3, v_2)$.

Jesliže nejkratší dráha z v_1 do v_2 vede přes v_3, pak začátek té dráhy je nejkratší dráha z v_1 do v_3 a její konec je nejkratší dráha z v_3 do v_2.

5.1 Dijkstrův algoritmus pro minimální dráhu

Princip: pro každý vrchol $v \in V$ si pamatujeme hodnotu $U(v)$, což bude délka nejkratší dosud nalezené dráhy ze startu s do vrcholu v; pokud jsme dosud žádnou cestu ze s do v nenašli, je $U(v) = \infty$. Proměnná `ODKUD`(v) bude obsahovat hranu, ze které se do vrcholu v po nejkratší dráze dostaneme. Množina D bude obsahovat vrcholy, pro které už je hodnota $U(v)$ rovna skutečně nejkratší vzdálenosti ze startu s do vrcholu v, tj. $U(v) = u(v)$.

1. **Inicializace**
   - $U(s) := 0$; pro všechny ostatní vrcholy $v \in V \setminus \{s\}$ polož $U(v) := \infty$.
   - `ODKUD`(v) zůstává zatím pro všechna $v \in V$ nedefinováno.
   - $D := \emptyset$.
2. **Výběr vrcholu**
   - Jestliže pro všechny vrcholy $v \in V \setminus D$ je $U(v) := \infty \Rightarrow$ `KONEC`,
   - jinak vybereme z množiny $v \in V \setminus D$ vrchol w, který má ze všech nejmenší hodnotu $U(w)$ a vrchol w přidáme do množiny D.
3. **Zpracování hran vycházejících z nově přidaného vrcholu** w
   Pro každou hranu e, vycházející z vrcholu w, provedeme následující kroky:
   - koncový vrchol hrany e označíme y,
   - je-li $y \in D$, neděláme nic a pokračujeme další hranou,
   - je-li $y \notin D$ a platí $U(y) > U(w) + \varphi(e)$, pak
     - $U(y) := U(w) + \varphi(e)$,
     - `ODKUD`$(y) := e$.
4. Pokračuj bodem 2.

Po skončení algoritmu pro všechny vrcholy v obsahují hodnoty $U(v)$ vzdálenost bodu v od startu. Proměnné `ODKUD`(v) obsahují hrany, které dohromady tvoří kořenový strom nejkratších hran s kořenem s.

Stačí-li nám nalézt minimální cestu do jednoho konkrétního vrcholu x, skončíme provádění algoritmu jakmile vrchol x přesuneme do množiny D.

Pro malé a husté grafy (hlavně při "ručním" řešení úlohy) můžeme algoritmus trochu zrychlit, pokud při inicializaci klademe $U(v) := \varphi([s, v])$.

Kapitola 6

Toky v síti

Pojmy: síť, dopravní síť, kapacita hrany, zdroj, spotřebič, tok v síti, přípustný tok, Kirchhofův zákon, velikost toku od zdroje ke spotřebiči, maximální tok. Řez, oddělující řez, velikost toku přes řez, kapacita řezu, minimální řez. Hrana vpřed, hrana vzad, zlepšující cesta, kapacita zlepšující cesty. Značkovací procedura, Ford-Fulkersonův algoritmus pro nalezení maximálního toku.

6.1 Dopravní síť

V celé kapitole 6 se budeme – podobně jako v kapitole 5 – zabývat orientovanými ohodnocenými grafy. Řešené úlohy ale budou mít zcela jiný charakter a i interpretace ohodnocení grafu bude jiná. Z tradičních důvodů budeme v této kapitole pro ohodnocený orientovaný graf používat termín *síť*.

Pomocí sítě je možné modelovat různé druhy systémů, které se běžně jako "síť" označují: silniční síť, železniční síť, potrubní síť, elektrická síť, počítačová síť, sociální síť (jak ve smyslu "pletivo společenských vztahů mezi osobami", tak ve smyslu "facebook a podobné záležitosti"), neuronová síť atd. Snad jen "rybářská síť" a "záchranná síť" nejsou smysluplné aplikace tohoto pojmu.

Speciálně nás bude zajímat jeden z typů sítě, a to dopravní (neboli též *transportní*) síť. *Dopravní síť* je uspořádaná pětice $G = (V, E, c, z, s)$, kde

- (V, E) je orientovaný graf,
- c je ohodnocení hran, pro které je $c(e) \geq 0$ pro všechny hrany $e \in E$; toto ohodnocení se nazývá *kapacita hrany*,
- $z, s \in V$ jsou dva speciálně označené vrcholy: z = zdroj, s = spotřebič.

Pojem "kapacita hrany" opět odpovídá tomu, co se pod pojmem "kapacita" v daných aplikacích obvykle myslí: množství vozidel, osob, vody, nákladu, elektrického proudu, dat atd., které může v daný okamžik nebo během určité časové jednotky přes hranu protéci. Proto také požadujeme, aby toto ohodnocení hran bylo nezáporné.

Povšimněte si, že na vlastnosti speciálních vrcholů “zdroj” a “spotřebič” neklademe žádné požadavky. Hrají svoji specifickou roli v řešených úlohách a budou mít odlišný význam při definici toku v síti, ale prozatím se ničím nevyznačují.

6.2 Tok v síti

Nejprve zavedeme následující značení:
$E^+(v)$ je množina hran vycházejících z vrcholu v.
$E^-(v)$ je množina hran, které končí ve vrcholu v.

Tok v síti G je ohodnocení hran sítě, které pro každý vrchol $v \in V$ kromě z a s splňuje *Kirchhofův zákon*:

$$\sum_{e \in E^+(v)} t(e) = \sum_{e \in E^-(v)} t(e).$$

Tj. “co do vrcholu přiteče, to z něj také odteče”. To je celkem rozumný požadavek a odpovídá fyzikálnímu náhledu. Znamená to, že kromě vrcholů z a s v žádném z ostatních vrcholů tok nemizí ani nevzniká (není tam například nějaké odstavné parkoviště, kam se mohou auta schovat, nebo vřídlo pramenité vody, která přibývá do vodovodní sítě a podobně). Tento předpoklad sice může být v některých aplikacích příliš omezující, ale existují postupy, jak se s ním v takových případech vypořádat. To ovšem přesahuje rámec tohoto stručného úvodního kursu.

Zatím jsme nijak nesvázali tok jakožto ohodnocení grafu s jeho druhým, od začátku pevně daným ohodnocením – s kapacitou hran. Učiníme tak nyní zcela přirozeně. *Přípustný tok v dopravní síti* $G = (V, E, c, z, s)$ je tok v síti G, který na každé hraně $e \in E$ splňuje nerovnost $0 \leq t(e) \leq c(e)$. To znamená, že je to tok nezáporný a nepřekračující kapacity hran – tedy takový, který opravdu může v síti existovat.

V dopravní síti mohou existovat různé přípustné toky; je užitečné moci je nějak změřit. *Velikost toku od zdroje ke spotřebiči* je číslo

$$\boxed{|t| = \sum_{e \in E^+(z)} t(e) - \sum_{e \in E^-(z)} t(e),}$$

tj. množství toku, které ve zdroji vzniká (přitom odečítáme to, co se do zdroje vrací).

Protože ve všech vrcholech kromě z a s platí Kirchhofovy zákony, platí nakonec také, že se velikost toku rovná množství toku, které mizí ve spotřebiči:

$$|t| = \sum_{e \in E^-(s)} t(e) - \sum_{e \in E^+(s)} t(e).$$

A jelikož už umíme tok změřit, můžeme vyslovit následující definici: *maximální tok* je přípustný tok od zdroje z ke spotřebiči s, který má největší možnou velikost $|t|$.

Interpretace tohoto pojmu je zřejmá: maximální tok nám udává množství vozidel (lidí, vody, marmelády, …), které můžeme skrz síť od zdroje ke spotřebiči “procpat”.

6.3 Řezy

Zkoumáme-li jízdu vozidel po nějaké dráze, jsou pro nás podstatné kapacity jednotlivých hran na ní. Jestliže však interpretujeme situaci jako tok v síti, mohou jednotlivá vozidla jet po různými dráhách a tedy používat různé hrany; proto nám znalost situace na jedné hraně nestačí. Pro tento případ potřebujeme využít pojem řezu.

Nechť je $A \subseteq V$ nějaká množina vrcholů grafu G. Definujeme *řez* určený množinou A, jako množinu $W(A)$ hran, jejichž jeden koncový vrchol náleží do množiny A a druhý do množiny $V \setminus A$.

Obrázek 6.1: Řez určený množinou A.

Dále zavedeme doplňující značení:
$W^+(A)$ je množina hran, jejichž počáteční vrchol leží v A a koncový vrchol neleží v A,
$W^-(A)$ je množina hran, jejichž počáteční vrchol neleží v A a koncový vrchol leží v A.
Zřejmě platí, že $W(A) = W^+(A) \cup W^-(A)$.

Jestliže je $z \in A$ a $s \notin A$, řekneme, že řez $W(A)$ určený množinou A *odděluje zdroj a spotřebič*. Každá dráha od zdroje ke spotřebiči obsahuje právě jednu hranu z tohoto řezu.

Definujeme nyní *velikost toku přes řez určený množinou* A jako:

$$\boxed{|t|_A = \sum_{e \in W^+(A)} t(e) - \sum_{e \in W^-(A)} t(e).}$$

Zhruba řečeno, velikost toku přes řez určený množinou A je "to, co z množiny A odtéká mínus to, co se do ní vrací".

Věta 6.1 *Buď t přípustný tok od zdroje ke spotřebiči v dopravní síti $G = (V, E, c, z, s)$ a $W(A)$ buď řez, oddělující zdroj a spotřebič. Pak velikost toku přes řez $W(A)$ je rovna velikosti toku od zdroje ke spotřebiči: $|t|_A = |t|$*

Znamená to, že pokud najdeme množinu hran, kterou při cestě ze zdroje do spotřebiče "nejde objet" (a nemůžeme ji zmenšit, aniž by o tuto vlastnost přišla), rovná se součet toku na těchto hranách množství toku, které vytéká ze zdroje – to je pochopitelné, ve všech vrcholech po cestě přece platí Kirchhofovy zákony.

Z tohoto hlediska bude důležitý následující pojem: *kapacita řezu* $W(A)$ je rovna součtu kapacit hran, které mají počáteční vrchol v množině A:

$$C(A) = \sum_{e \in W^+(A)} c(e).$$

Povšimněte si, že hrany, které do množiny A vcházejí, nemají na kapacitu řezu žádný vliv. *Minimální řez* je řez, který odděluje zdroj a spotřebič a jeho kapacita je nejmenší možná.

Protože velikost toku od zdroje ke spotřebiči je rovna velikosti toku přes oddělující řez, a ta nemůže být větší, než je jeho kapacita, platí následující věta:

Věta 6.2 *Buď t přípustný tok od zdroje ke spotřebiči v dopravní síti $G = (V, E, c, z, s)$ a $W(A)$ buď řez, oddělující zdroj a spotřebič. Pak velikost toku od zdroje ke spotřebiči je menší nebo rovna kapacitě řezu $W(A)$: $|t| \leq C(A)$.*

Jestliže ve větě 6.2 platí rovnost, jedná se o maximální tok:

Věta 6.3 *Buď t přípustný tok od zdroje ke spotřebiči v dopravní síti $G = (V, E, c, z, s)$ a $W(A)$ buď řez, oddělující zdroj a spotřebič. Jestliže je velikost toku rovna kapacitě řezu ($|t| = C(A)$), pak je tok t maximálním tokem od zdroje ke spotřebiči v síti G a $W(A)$ je minimální řez v této síti.*

Tuto větu můžeme použít k ověření, že nalezený tok je již maximální. Nalezení minimálního řezu však nemusí být úplně jednoduché.

Důsledek: Velikost maximálního toku je rovna kapacitě minimálního řezu.

6.4 Nalezení maximálního toku

Princip algoritmu pro nalezení maximálního toku a minimálního řezu je jednoduchý. Začneme s libovolným přípustným tokem (například s nulovým tokem – ten je vždy přípustný). Najdeme cestu od zdroje ke spotřebiči, která nám umožní tok zlepšit (tj. zvětšit) bez porušení Kirchhofových zákonů. Zlepšíme tok a pokračujeme, dokud je to možné.

6.4.1 Zlepšující cesta

Mějme orientovaný graf G a v něm cestu $C = v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$. Připomínám, že cesta je neorientovaný sled, v němž se neopakuje žádná hrana (viz kapitolu 1.6.1).

Hranu e_i cesty C, která spojuje vrcholy v_{i-1} a v_i, nazveme *hranou vpřed*, je-li orientována ve směru průchodu cestou, to znamená, že $e_i = [v_{i-1}, v_i]$. Podobně nazveme hranu e_j cesty C, která spojuje vrcholy v_{j-1} a v_j, *hranou vzad*, jestliže je orientována proti směru průchodu cestou, tj. $e_j = [v_j, v_{j-1}]$.

Obrázek 6.2: Hrany vpřed a hrany vzad.

Předpokládejme nyní, že máme dopravní síť $G = (V, E, c, z, s)$ a v ní přípustný tok t. Řekneme, že (neorientovaná) cesta ze zdroje z ke spotřebiči s je *zlepšující cesta vzhledem k toku t*, jestliže pro každou její hranu e platí:

- je-li e hrana vpřed, je $t(e) < c(e)$ (tj. na této hraně je možné tok zvýšit), a

- je-li e hrana vzad, je $t(e) > 0$ (tj. na této hraně je možné tok snížit).

Kapacita d *zlepšující cesty* C je maximální hodnota, o kterou je možné změnit tok na zlepšující cestě:

$$d = \min_{e \in C} \left(\{c(e) - t(e), e \text{ je hrana vpřed}\}, \{t(e), e \text{ je hrana vzad}\} \right).$$

Změna toku podél zlepšující cesty. Tok na hranách vpřed zvýšíme o kapacitu zlepšující cesty d, na hranách vzad jej o stejnou hodnotu snížíme. Tím ve všech vrcholech zůstanou zachovány Kirchhofovy zákony, tok zůstane přípustný a jeho velikost se zvětší o hodnotu d.

Zlepšující cestu můžeme nalézt "zkusmo". Pokud se nám to nedaří (nebo pokud potřebujeme úlohu algoritmizovat), můžeme pro její nalezení použít následující poněkud pracnou *značkovací proceduru.*

Značkovací procedura pro nalezení zlepšující cesty. Do množin C^+ a C^- budeme ukládat hrany, které mohou být částí zlepšující cesty.

1. **Inicializace.** Označkujeme vrchol z, ostatní vrcholy jsou bez značek; množiny C^+ a C^- jsou prázdné.

2. **Značkování vpřed.** Jestliže existuje hrana $e = [v, w]$ taková, že vrchol v má značku, vrchol w nemá značku a $t(e) < c(e)$, pak označkujeme její koncový vrchol w a hranu e přidáme do množiny C^+ (kandidát na hranu vpřed).
   Pokračujeme znovu bodem 2.

3. **Značkování vzad.** Jestliže existuje hrana $e = [v, w]$ taková, že vrchol w má značku, vrchol v nemá značku a $t(e) > 0$, pak označkujeme její počáteční vrchol v a hranu e přidáme do množiny C^- (kandidát na hranu vzad). Pokračujeme znovu bodem 3.

4. **Test ukončení.** Je označkován vrchol s (spotřebič)?

   - Ano: nalezli jsme zlepšující cestu. `KONEC.`
   - Ne; mohou nastat dva případy:
     – je možné označkovat některý z dalších vrcholů postupem podle bodu 2 nebo 3: pokračuj bodem 2.
     – není možné označkovat žádný další vrchol: zlepšující cesta neexistuje. `KONEC.`

Pokud značkovací procedura skončí nalezením zlepšující cesty, obsahuje množina C^+ všechny hrany, které mohou být hranami vpřed zlepšující cesty a množina C^- obsahuje všechny hrany, které mohou být jejími hranami vzad. V ideálním případě je zlepšující cesta rovna sjednocení $C^+ \cup C^-$, ale většinou musíme ještě odstranit různé "slepé odbočky".

6.4.2 Ford-Fulkersonův algoritmus

Ford-Fulkersonův algoritmus slouží k nalezení maximálního toku.

Vstup: dopravní síť $G = (V, E, c, z, s)$ a přípustný tok t v síti G.

1. **Značkování.** Provedeme značkovací proceduru pro nalezení zlepšující cesty podle kapitoly 6.4.1.
   - Je označkován spotřebič: byla nalezena zlepšující cesta.
     Pokračujeme bodem 2.
   - Není označkován spotřebič: zlepšující cesta neexistuje.
     Pokračujeme bodem 3.
2. **Změna toku podél zlepšující cesty.** Změníme tok o hodnotu kapacity nalezené zlepšující cesty podle kapitoly 6.4.1. Pokračujeme bodem 1.
3. **Ukončení.** Nyní je tok t maximálním tokem. Označíme-li A množinu naposledy označkovaných vrcholů, pak je $W(A)$ minimální řez.