Kapitola 1

Úvod

Pojmy: graf, vrchol, hrana, smyčka, orientovaná a neorientovaná hrana, násobné hrany, prostý graf, multigraf, orientovaný a neorientovaný graf. Matice sousednosti, incidenční matice. Vstupní a výstupní stupeň vrcholu. Sled, dráha, cesta, tah, cyklus, kružnice. Souvislost, slabá a silná souvislost, komponenta.

1.1 Co ještě chybí

- symetrizace grafu
- podgraf, faktor

1.2 Co to jsou grafy?

Pojem "graf" má celou řadu významů, a to i rámci samotné matematiky. Teorie grafů se nezabývá ani grafy funkcí, ani koláčovými či sloupcovými grafy, využívanými ve statistice. "Grafem" se v teorii grafů rozumí množina bodů a čar, které je spojují, jako na obrázku 1.1. Takový graf může popisovat širokou škálu situací a problémů:

Grafy si můžeme představit jako zjednodušení reálného světa, kde studovaný problém znázorníme pomocí bodů a čar, které je spojují, a tím popisují vztahy mezi nimi. Takovým bodům pak v teorii grafů říkáme vrcholy grafu a čáry, které je spojují, nazýváme hrany grafu.

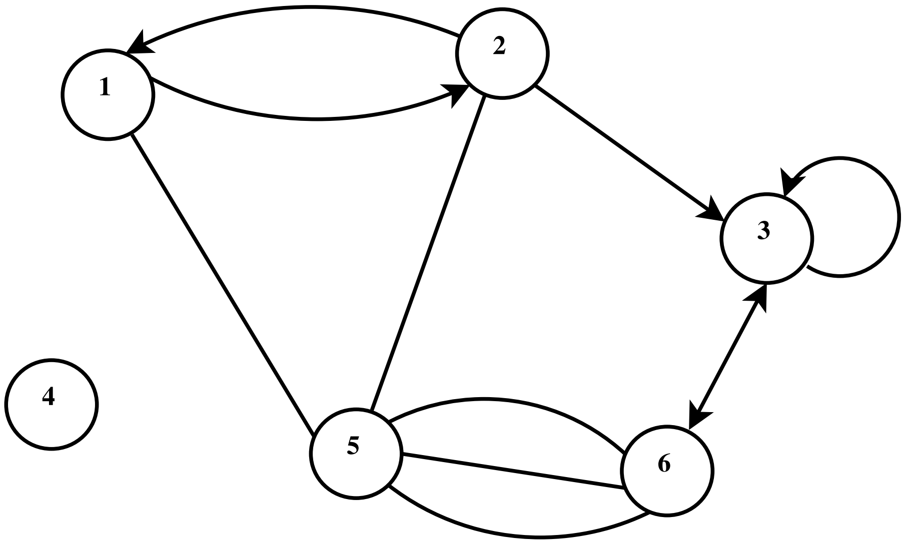
1.3 Orientovaný a neorientovaný graf

Nyní se pokusíme precizovat naši představu o grafech a formulovat jejich exaktní definici.

Graf G je uspořádaná dvojice dvou množin $G = (V, E)$, kde prvky množiny V nazýváme *vrcholy* (někdy se ve stejném smyslu používá termín *uzly*) a prvky množiny E nazýváme *hrany* (někdy též *žebra*)[1]. Množina hran E je přitom podmnožinou sjednocení množin $V^2 \cup [V]^2 \cup V$, kde

[1] Označení množin V a E pocházejí z anglických slov *vertex* (pl. *vertices*) – vrchol a *edge* – hrana.

- V^2 je množina všech uspořádaných dvojic vrcholů z množiny V, a
- $[V]^2$ je množina všech neuspořádaných dvojic (tj. dvouprvkových podmnožin) vrcholů z množiny V.



Obrázek 1.1: Příklad obecného grafu.

U hrany, které náleží do množiny všech **uspořádaných** dvojic vrcholů V^2, můžeme rozlišit jejich "první" a "druhý" vrchol (čili "začátek" a "konec"); tyto hrany nazýváme *orientované* a reprezentujeme je čárou se šipkou. Na obrázku 1.1 jsou orientovanou hranou spojeny vrcholy 2 a 3. Říkáme, že

Mezi vrcholy 1 a 2 existují dvě orientované hrany: jedna vede z vrcholu 1 do vrcholu 2 a druhá z vrcholu 2 do vrcholu 1. Stejně tak existují dvě orientované hrany mezi vrcholy 3 a 6, na obrázku jsou však zakresleny jako jedna čára se šipkami na obou koncích. Oba tyto způsoby znázornění jsou ekvivalentní a znamenají totéž. Můžeme používat libovolný z nich, podle toho, který se nám zdá přehlednější, není však vhodné je kombinovat v jednom obrázku.

U hran z množiny $[V]^2$ **neuspořádaných** dvojic mají oba vrcholy stejné postavení; tyto hrany nazýváme *neorientované* a reprezentují se spojnicí bez šipek. Na obrázku 1.1 jsou neorientovanou hranou spojeny například vrcholy 2 a 5 nebo vrcholy 1 a 5.

Mezi vrcholy 5 a 6 existují tři různé neorientované hrany. Graf, ve kterém existují takové *násobné* hrany, se nazývá *multigraf.* V tomto skriptu se nebudeme multigrafy zabývat a budeme pracovat pouze s grafy *prostými*, ve kterých mezi každými dvěma vrcholy existuje nejvýše jedna hrana. Přitom dvě orientované hrany, které spojují dva vrcholy v opačných směrech, nepovažujeme za násobné a situace, jaká je mezi vrcholy 1 a 2, se tedy může vyskytnout i v prostém grafu.

Hrany z množiny V mají stejný počáteční i koncový vrchol — jsou to *smyčky*; na obrázku 1.1 je smyčka u vrcholu 3. Nadále se budeme zabývat pouze grafy bez smyček (někdy se označují jako grafy *obyčejné*).

Skutečnost, že vrchol V je krajním bodem hrany E, tj. buď $E = \{V, V'\}$ nebo $E = [V, V']$ nebo $E = [V', V]$ nebo $E = \{V\}$, vyjadřujeme termínem *vrchol* V *inciduje s hranou* E nebo *hrana* E *inciduje s vrcholem* V. Vrchol 4 na obrázku 1.1 neinciduje s žádnou hranou. Je zde pro zdůraznění skutečnosti, že i taková situace může nastat. Na druhé straně nemůže existovat hrana, která neinciduje s žádným vrcholem.

I když nebudeme připouštět násobné hrany a smyčky, může být obecný graf pořád ještě příliš komplikovaný. Proto se budeme zabývat pouze dvěma skupinami grafů:

- grafy *orientovanými*, které mají všechny hrany orientované, a
- grafy *neorientovanými*, které mají všechny hrany neorientované.

Grafy *smíšené*, které obsahují oba typy hran, nebudeme uvažovat. To ve skutečnosti není příliš omezující, protože každý graf můžeme popsat jako orientovaný prostě tak, že každou neorientovanou hranu $\{V_1, V_2\}$ nahradíme dvojicí orientovaných hran $[V_1, V_2]$ a $[V_2, V_1]$. V obrázku to znamená, že každou neorientovanou hranu opatříme na každém konci šipkou.

Na druhé straně každý graf indukuje neorientovaný graf, který vznikne nahražením každé orientované hrany neorientovanou (a odstraněním násobných hran, které tím případně vzniknou). V obrázku to znamená vymazání všech šipek. Při tomto postupu se samozřejmě ztrácí část informace, ale pro některé aplikace jsou neorientované grafy praktičtější.

Tím se dostáváme k formulaci základních definic grafů:

Definice: *Orientovaný prostý graf bez smyček* G je uspořádaná dvojice množin $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a množina hran E je podmnožinou množiny V^2 všech uspořádaných dvojic vrcholů.

Orientované grafy se používají hlavně k popisu vztahů, které jsou svojí podstatou asymetrické: A je nadřízený B, činnost A může začít po ukončení činnosti B, skupina A je podskupinou skupiny B, družstvo A na turnaji porazilo družstvo B a podobně.

Definice: *Neorientovaný prostý graf bez smyček* G je uspořádaná dvojice množin $G = (V, E)$, kde V je množina vrcholů a množina hran E je podmnožinou množiny $[V]^2$ všech dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů V.

Neorientované grafy jsou vhodné pro popis symetrických vztahů: A sousedí s B, A je vodivě spojeno s B, postavy A a B se objeví na jevišti zároveň a podobně.

Jen malé zaváhání může přinést popis situace, kdy není zcela zřejmé, jedná-li se o zcela symetrický vztah, například "z místa A vede přímá cesta do místa B". Většinou by mohl stačit neorientovaný graf, ale co když tam budou nějaké jednosměrky? Řešení je snadné: pokud se v systému vyskytuje (nebo se potenciálně může vyskytnout) alespoň jedno místo, které je potřeba popsat orientovanou hranou, použijeme k popisu celého systému orientovaný graf.

Stejně tak použijeme orientovaný graf tehdy, pokud jsme na pohybách o struktuře systému. Jak jsme již uvedli, orientovaný graf je obecnější než neorientovaný, takže s jeho pomocí dospějeme k výsledku i v případě, že by stačil graf neorientovaný. Přinejhorším bude postup pracnější.

Pozor: od tohoto bodu nemám skripta dopsaná, uvádím jen definice, věty a stručné poznámky.

1.4 Způsoby reprezentace grafu

1.4.1 Grafická reprezentace

Nejpřirozenějším způsobem reprezentace grafů je reprezentace grafická, stručně řečeno obrázek. Přesným matematickým popisem "obrázku" se nebudeme zabývat, jen stručně shrneme:

- vrcholy znázorňujeme body, tečkami či puntíky, případně kroužky (ty jsou vhodné v případě, že potřebujeme vrcholy nějak pojmenovat, protože toto pojmenování pak úhledně vepíšeme do kroužku),
- neorientované hrany se znázorňují jako spojnice dvou vrcholů; tato spojnice může být rovná, zakřivená i lomená a hrany se mohou křížit (vždy se ovšem snažíme o přehlednost),
- orientované hrany jsou spojnice dvou vrcholů se šipkou na jednom konci; dvě protisměrné šipky mezi jednou dvojicí vrcholů lze nahradit jednou spojnicí se šipkami na obou koncích.

Graf je vhodné znázornit obrázkem v případě, kdy s ním bude pracovat člověk. Je to znázornění přirozené a určitou informaci z něj může získat i jedinec, který není s teorií grafů nijak obeznámen. Pro rozsáhlejší grafy je však již nepřehledné. Při zpracování na počítači není grafická reprezentace vhodná.

1.4.2 Popis grafu seznamem

Seznam vrcholů a seznam hran:
$V = \{1, 2, 3, 4\}$
$E = \{[1, 2], [3, 2], [1, 3], [3, 4], [4, 3]\}$

Seznam sousedů: $V = \{1 : 2, 3; 2 : \emptyset; 3 : 2, 4; 4 : 3\}$

1.4.3 Maticové reprezentace grafu

V ... množina vrcholů —V— ... velikost množiny vrcholů, tedy počet vrcholů (číslo)
E ... množina hran —E— ... velikost množiny hran, tedy počet hran (číslo)

Matice sousednosti je matice $M = (m_{ij})$ typu $|V| \times |V|$, definovaná vztahem
$m_{ij} = 1$, pokud $[v_i, v_j] \in E$, a
$m_{ij} = 0$ jinak.

Na diagonále matice sousednosti jsou nuly (jinak by v příslušném vrcholu existovala smyčka). Matice sousednosti neorientovaného grafu je symetrická.

Incidenční matice orientovaného grafu je matice $B = (b_{ij})$ typu $|V|\times|E|$, definovaná vztahem

$b_{ij} = 1$, jestliže v_i je počátečním vrcholem hrany e_j,
$b_{ij} = -1$, jestliže v_i je koncovým vrcholem hrany e_j a
$b_{ij} = 0$ jinak.
V každém sloupci je právě jedna 1 a jedna -1.

Incidenční matice neorientovaného grafu je matice $B = (b_{ij})$ typu $|V| \times |E|$, definovaná vztahem
$b_{ij} = 1$, jestliže vrchol v_i inciduje s hranou e_j a
$b_{ij} = 0$ jinak.
V každém sloupci jsou právě dvě 1.

1.5 Stupeň vrcholu

Stupeň vrcholu $\mathrm{d}(v)$, $\deg(v)$ je počet hran, které s vrcholem v incidují.

Orientovaný graf:
vstupní stupeň vrcholu $\mathrm{d}^-(v)$ je počet hran vstupujících do vrcholu v,
výstupní stupeň vrcholu $\mathrm{d}^+(v)$ je počet hran vystupujících z vrcholu v.
Platí: $\mathrm{d}(v) = \mathrm{d}^-(v) + \mathrm{d}^+(v)$.

Určení stupně:

- obrázek – zřejmé
- matice sousednosti:
  - $\mathrm{d}^+(v)$ = počet jedniček v řádku
  - $\mathrm{d}^-(v)$ = počet jedniček v sloupci
  - neorientovaný graf: $\mathrm{d}(v)$ = počet jedniček v řádku = počet jedniček ve sloupci
- incidenční matice:
  - $\mathrm{d}^+(v)$ = počet jedniček v řádku
  - $\mathrm{d}^-(v)$ = počet -1 v řádku
  - $\mathrm{d}(v)$ = počet nenulových prvků v řádku

1.6 Souvislost grafu

1.6.1 Sledy a příbuzné pojmy

1.6.1.1 V orientovaném grafu

Sled (těř *orientovaný sled*) je posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$, ve kterém každá hrana e_i vede z vrcholu v_{i-1} do vrcholu v_i ($e_i = [v_{i-1}, v_i]$).

Orientovaný sled, v němž se neopakuje žádná hrana, je *dráha* (též *orientovaná cesta*).
Uzavřená dráha (tj. $v_0 = v_n$) se nazývá *cyklus.*

1.6.1.2 V neorientovaném grafu

Neorientovaný sled je posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, e_n, v_n$, ve kterém každá hrana e_i spojuje vrcholy v_{i-1} a v_i. ($e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$).

Neorientovaný sled, v němž se neopakuje žádná hrana, je *cesta* (též *neorientovaná cesta*).
Uzavřená neorientovaná cesta (tj. $v_0 = v_n$) se nazývá *kružnice*.

Orientovaný i neorientovaný sled, v němž se neopakuje žádný vrchol (nanejvýš může být $v_0 = v_n$), je *tah*.

1.6.2 Souvislost grafu

1.6.2.1 Souvislost v neorientovaném grafu

Neorientovaný graf je *souvislý*, právě když každé dva vrcholy jsou spojeny neorientovanou cestou.

Největší možný souvislý podgraf grafu se nazývá *komponenta souvislosti* (případně *souvislá komponenta*) grafu.

1.6.2.2 Souvislost v orientovaném grafu

Orientovaný graf je *slabě souvislý*, je-li jeho symetrizace souvislá.

Orientovaný graf je *silně souvislý*, když pro každou dvojici vrcholů u a v existuje orientovaná cesta z u do v i z v do u (obě cesty mohou vést jinudy).